

ALGUNAS ALGEBRAS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

por

J.L. Cerdá

y

J. Cufí

Si I es un intervalo, acotado o no, y si λ es un espacio normal de sucesiones de números complejos que contiene a φ (espacio de las sucesiones casi nulas), como en [1] vamos a considerar el espacio $\mathcal{E}^\lambda(I)$ de funciones $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞ tales que

$$p_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\| \cdot |u_n| < \infty \text{ para toda } u \in \lambda$$

en donde se designa

$$\|f^{(n)}\| = \sup_{t \in I} |f^{(n)}(t)|,$$

y se supone a $\mathcal{E}^\lambda(I)$ provisto de la topología definida por las seminormas p_u ($u \in \lambda$).

Así para (M_n) sucesión de términos positivos y

$$\lambda = (M_n^{-1}) h(\infty) = \left\{ \left(\frac{u_n}{M_n} \right) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0 \right\}$$

se obtienen las clases clásicas

$$\mathcal{E}^\lambda(I) = C_I \{M_n\}$$

(ver [4]) y en el caso

$$\lambda = (M_n^{-1}) \cdot 1^\infty = \left\{ \left(\frac{u}{M_n} \right) : \sup |u_n| < \infty \right\}$$

las clases

$$\mathfrak{L}^\lambda(I) = D \{M_n\}$$

análogas a las consideradas en [2].

Aquí tratamos de imponer a λ condiciones bajo las que $\mathfrak{L}^\lambda(I)$ es álgebra topológica.

Es obvio que son equivalentes:

(a) Para toda $u \in \lambda$ existen $u' \in \lambda$ tal que

$$\binom{n}{k} |u_n| \leq |u'_k| \cdot |u'_{n-k}| \quad \text{si } 0 \leq k \leq n$$

(a') Para toda $u \in \lambda$ existen $u', u'' \in \lambda$ y una constante $C > 0$ tales que

$$|u_n| \leq C \frac{|u'_k| |u''_{n-k}|}{\binom{n}{k}} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n$$

Proposición 1. - Si λ cumple (a) entonces $\mathfrak{L}^\lambda(I)$ es álgebra topológica pues la multiplicación de funciones cumple que para toda $u \in \lambda$ existe $v \in \lambda$ tal que

$$p_u(fg) \leq p_v(f) p_v(g)$$

Proposición 2. - Si λ es estable frente a las transformaciones diagonales del tipo $u \rightarrow (k^n) u$ (o sea $(k^n u_n) \in \lambda$ si $(u_n) \in \lambda$) y si para toda $u \in \lambda$ no negativa existe otra $u' \in \lambda$ y una constante $M > 0$ tales que

$$u_n \leq M^n |u'_k| |u'_{n-k}| \quad (0 \leq k \leq n)$$

entonces $\mathfrak{L}^\lambda(I)$ es álgebra topológica.

Proposición 3. - Sea λ tal que para cada $u \in \lambda$ no negativa existe otra $u' \in \lambda$ tal que

$$u_n \leq u'_k u'_{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Si (M_n) es sucesión de términos positivos y además

$$(1) \quad \binom{n}{k} M_k M_{n-k} \leq M_n \quad (0 \leq k \leq n)$$

o bien

(2) $M_k M_{n-k} \leq K^n M_n$ ($0 \leq k \leq n$) y λ es estable frente a las transformaciones diagonales $u \rightarrow (k^n)u$ entonces $\xi^{(M_n^{-1})\lambda} (I)$ es álgebra topológica.

Esta proposición se aplica al espacio de sucesiones $h[0] = \{ u : (|u_n|) \text{ mayorada por alguna } (k^n) \text{ con } k > 0 \}$, en el que los (k^n) con $k > 0$ forman una familia cofinal de sucesiones $u \in h[0]$ no negativas tales que

$$u_n = u_k u_{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

y es invariante frente a las $u \rightarrow (k^n)u$ ($k > 0$) de modo que, si $M_k M_{n-k} \leq K^n M_n$ ($0 \leq k \leq n$), $\xi^{M_n^{-1}} h[0] (I)$ es álgebra topológica.

Lo mismo sucede con $C_I \{M_n\}$ pues se cumple que $h(\infty)$ es estable frente a las $u \rightarrow (k^n)u$ y además

Proposición 4.- En $h(\infty)$ toda sucesión está mayorada por otra $u = (u_n)$ de términos positivos decreciente y para cada $u \in h(\infty)$ de este tipo con $u_0 = 1$ existe otra análoga $u' \in h(\infty)$ tal que

$$u_n \leq u'_k u'_{n-k} \quad (0 \leq k < n)$$

Demostración.- Basta limitarse a (u_n) con $u_n > 0$ y además se puede suponer a (u_n) decreciente con $u_0 = 1$ y definir u' del siguiente modo:

$$u'_0 = 1 \quad \text{y, si } n \geq 1, \text{ por inducción}$$

$$u'_n = \max \left\{ \frac{u_n}{u'_0}, \frac{u_{n+1}}{u'_1}, \dots, \frac{u_{2n-1}}{u'_{n-1}}, \sqrt{u_{2n}} \right\}$$

La proposición 3 - (1) se aplica también a $D_I(M_n)$, que será álgebra topológica si $\binom{n}{k} M_k M_{n-k} \leq M_n$ ($0 \leq k < n$). En este caso se trata de un álgebra de Banach pues su topología es la definida por la norma p_u con $u = \left(\frac{1}{M_n} \right)$.

En el estudio de las álgebras es importante conocer a los elementos inversibles.

Si $f \in \xi^\lambda(I)$ es inversible en $\xi^\lambda(I)$, o sea, si existe $g \in \xi^\lambda(I)$ tal que $fg = 1$, necesariamente existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t)| \geq \delta > 0 \quad \forall t \in I$$

puesto que g está acotada.

Diremos que $\xi^\lambda(I)$ es de inversión si se cumple el recíproco, o sea, si

$$f \in \xi^\lambda(I), |f(t)| \geq \delta > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \xi^\lambda(I).$$

Proposición 5.- Si $\xi^\lambda(I)$ es álgebra de inversión, los elementos de inversión constituyen un entorno uniforme (luego también para la topología normal) de la unidad $1 \in \xi^\lambda(I)$ y con ello se cumplen:

- (a) Todo carácter $\chi \in \text{Sp } \xi^\lambda(I)$ es continuo.
- (b) Todo ideal maximal $M \in \mathfrak{M}[\xi^\lambda(I)]$ es cerrado.
- (c) $\text{Sp } \xi^\lambda(I)$ es compacto (para la topología de Gelfand).

Demostración.- Toda $f \in \xi^\lambda(I)$ tal que $\|f - 1\| < 1$ será invertible pues si $\|f - 1\| = 1 - \delta$, necesariamente $|f(t)| \geq \delta, \forall t \in I$. Tales funciones constituyen un entorno uniforme de la unidad. Por lo tanto se cumple (b) y también (a).

En cuanto a (c) basta observar que $\text{Sp } \xi^\lambda(I)$ es cerrado en A'_0 para $A = \xi^\lambda(I)$ y es relativamente compacto en A'_0 ya que está contenido en el polar de U si U es entorno absolutamente convexo de cero en A tal que $1+U$ está constituido por elementos inversibles.

Por lo tanto tienen interés los resultados que aseguran el que un álgebra $\xi^\lambda(I)$ sea de inversión y como en [3] y [5] resulta:

Proposición 6.- Consideremos λ estable frente a las $u \rightarrow (k^u) u$. Para que $\xi^\lambda(I)$ sea de inversión es suficiente que para cada $w \in \lambda'$ (o sea $\sum |w_n u_n| < \infty \quad \forall u \in \lambda$) exista $v \in \lambda$ tal que $|w_n| < v_n$ y $A_n = \sqrt[n]{\frac{v_n}{n!}}$ sea casi creciente, o sea

$$A_n \leq K A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para alguna constante $K \geq 1$

Demostración.-Sea $f \in \xi^\lambda(I)$ tal que $|f(t)| \geq 1 \quad \forall t \in I$ y $gf = 1$.

Se trata de comprobar que $g \in \xi^\lambda(I)$.

Se cumple $\|f^{(n)}\| \leq v_n$ con $A_n = \sqrt[n]{\frac{v_n}{n!}}$ tal que

$$A_s \leq K A_n \quad \text{si } s \leq n$$

Sean r_n tales que

$$K A_n r_n = \frac{1}{3}$$

de modo que para $1 < s \leq n$ se cumplen, para $t_0 \in I$

$$\frac{f^{(s)}(t_0)}{s!} \leq \frac{v_s}{s!} \leq K^s A_n^s$$

y si se designa

$$Q(z) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!} z + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} z^n$$

se cumple $Q^{(s)}(0) = f^{(s)}(t_0)$ y en $|z| \leq r_n$ es

$$|Q(z)| \geq 1 - \sum_{s=1}^n K^s A_n^s r_n^s \geq 1 - \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^s \geq 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

De las integrales de Cauchy resulta

$$|g^{(n)}(t_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{z=r_n} \frac{dz}{z^{n+1} Q(z)} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r_n}{r_n^{n+1} \frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \frac{n!}{r_n^n} 2 \cdot n! (3KA_n)^n \quad \text{y con ello}$$

$$\|g^{(n)}\| \leq 2 \cdot n! (3K)^n \frac{v_n}{n!} = 2(3K)^n v_n$$

lo que demuestra que $g \in \mathcal{G}^\lambda(I)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cerdá, J.L. y Cuff, J. "Algunas clases generales de funciones infinitamente diferenciables" Coll. Math. (en prensa)
- [2] Dales, H.G. y Davie, A.M. "Quasianalytic Banach Function Algebras" J. of Func[An.], 13(1973), 28-50.
- [3] Malliavin, P. "Calcul symbolique et sous-algèbres de $L^1(G)$ ", Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), 181-190.
- [4] Mandelbrojt, S. "Series adhérentes, régularization des suites, applications" Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [5] Rudin, W. "Division in Algebras of Infinitely Differentiable functions". J. Math. Mech. 11 (1962), 797-809.