

CUASIANALITICIDAD EN CLASES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

DE CUADRADO SUMABLE

por

J. Bruna

λ designará espacio normal de sucesiones. En analogía con

$$E^\lambda(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}); f^{(n)} \text{ es acotada y } (\|f^{(n)}\|_\infty)_n \in \lambda\}$$

definimos la clase

$$D^\lambda(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}); f^{(n)} \in L(\mathbb{R}) \text{ y } (\|f^{(n)}\|_2)_n \in \lambda\}.$$

La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ se llamará cuasianalítica si $f \in D^\lambda(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(c) = 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$ implican $f \equiv 0$. Nos proponemos encontrar caracterizaciones de la cuasianaliticidad de la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$.

La no cuasianaliticidad de la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ equivale a la existencia de $f \in D^\lambda(\mathbb{R})$ con $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $f \neq 0$. Un teorema de Paley-Wiener establece que la transformación de Fourier-Laplace es una isometría entre $L^2(0, \infty)$ y el espacio $H^2(\pi^+)$ de las funciones holomorfas en el semiplano π^+ de los $z \in \mathbb{C}$ con

Re $z > 0$ que verifican

$$\sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy = C < \infty$$

con norma $\|F\|_2^2 = C$.

Aquí vamos a ver cómo es F si tomamos f en $D^k(\mathbb{R})$. Empezemos por tomar $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$. Ponemos

$$F_n(z) = \int_0^\infty f^{(n)}(t) e^{-tz} dt. \quad F_n \in H^2(\pi^+), \quad n=0,1,\dots$$

Veamos que $F_n(z) = z^n F(z)$. Por inducción, basta verlo para $n=1$. Una integración por partes da

$$F_1(z) = f(t) e^{-tz} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t) e^{-tz} dt.$$

Como f está acotada, se deduce $F_1(z) = zF(z)$. Recíprocamente, supongamos que $z^n F(z) \in H^2(\pi^+)$, $n=0,1,\dots$. El teorema de Paley-Wiener dice que $z^n F(z)$ es la transformada de Fourier-Laplace de una $f_n \in L^2(0,\infty)$ con $\|f_n\|_2 = \|z^n F\|_2$. Vamos

a ver que f_0 está definida por todo, que $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f_0^{(n)} = f_n$.

$$f_0(t) = \frac{e^{tx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy) e^{ity} dy$$

Para lo primero basta ver pues que $F_x(y) = F(x+iy)$ está en L^1 para $x > 0$. Pero

$$F_x(y) = F(x+iy) = \frac{1}{x+iy} F(x+iy)(x+iy)$$

es el producto de $y \rightarrow \frac{1}{x+iy}$ y $y \rightarrow F(x+iy)(x+iy)$. La primera tiene cuadrado $\frac{1}{x^2+y^2}$, integrable, y la segunda está en L^2 por hipótesis.

Por tanto,

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) e^{tz} dz$$

está definida para todo t . Puesto que $z^n F$ verifica las mismas condiciones, también

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^n e^{tz} dz$$

está definida para todo t . Comparando, se deduce que $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f_0^{(n)} = f_n$.

Se ha demostrado pues la siguiente variante del teorema de Paley-Wiener:

" Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$, $n=0,1,\dots$. Se define

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-tz} dt, \text{ para } \operatorname{Re} z > 0$$

Entonces $z^n F(z) \in H^2(\pi^+)$ $n=0,1,\dots$ y $\|z^n F\|_2 = \|f^{(n)}\|_2$. Recíprocamente, si F es holomorfa en π^+ y $z^n F(z) \in H^2(\pi^+)$, $n=0,1,\dots$ existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$, $n=0,1,\dots$ y F es la transformada de Fourier-Laplace de f "

Especializando a funciones de $D^\lambda(\mathbb{R})$, se tiene

Teorema 1. La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe una función F holomorfa en π^+ tal que $z^n F \in H^2(\pi^+)$ $n=0,1,\dots$ y $(\|z^n F\|_2)_n \in \lambda$.

Nos proponemos encontrar ahora otro tipo de condición para la no cuasianaliticidad de la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$. Buscaremos la imagen $\hat{D}^\lambda(\mathbb{R})$ de $D^\lambda(\mathbb{R})$ por la transformación de Fourier-Plancherel. La caracterización de $\hat{D}^\lambda(\mathbb{R})$ se basa en el siguiente lema, de sencilla demostración.

Lema. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, \hat{f} su transformada de Fourier-Plancherel. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) f está definida por todo, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall n$
 (b) $\forall n, t^n \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

En tal caso $\widehat{f^{(n)}} = (it)^n \hat{f}$

Se obtiene la caracterización

$$\hat{D}^\lambda(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / t^n f \in L^2(\mathbb{R}), n=0,1,\dots \text{ y } (\|t^n f\|_2)_n \in \lambda\}$$

y para plantear la no cuasianaliticidad en estos términos necesitamos saber cómo es \hat{f} si $f \in D^\lambda(\mathbb{R})$ es nula par $t \leq 0$.

Para ello usamos la siguiente proposición que ya está enunciada en [1]:

Proposición 1. - sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$ c.p.t. Una condición necesaria y suficiente para que exista $f \in L^2(0,\infty)$ tal que

$$|\hat{f}| = \phi \text{ es que } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \phi(t)|}{1+t^2} dt < \infty$$

Para la demostración basta enunciar la proposición en términos de la transformada de Laplace F de f . Se sabe que \hat{f} coincide con la función F^* , definida casi por todo a partir de F por $F^*(y) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x+iy)$ (Fatou). Resulta la siguiente: "para $\phi \in L^2$, $\phi \geq 0$ c.p.t., una condición necesaria y suficiente para que

exista $F \in H^2(\pi^+)$ tal que $|F^*| = \phi$ es que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \phi(t)|}{1+t^2} dt < \infty$.

Enunciado así, no es más que una conocida propiedad del espacio $H^2(\pi^+)$ (ver [2]).

Supongamos ahora que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ $n=0,1,\dots$ y $f(t) = 0$ para $t \leq 0$. Entonces \hat{f} verifica $t^k \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \hat{f}(t)|}{1+t^2} dt < \infty$. Recíprocamente, si \hat{f} verifica estas condi

ciones, la proposición 1 da una $f \in L^2(0,\infty)$ tal que $|\hat{f}| = \hat{f}$ y pue^s to que $t^k \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, se puede tomar, por el lema, f de clase C^∞ con todas las derivadas en L^2 . Por tanto, se tiene

Proposición 2.- Sea $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \geq 0$ c.p.t. Para que exista $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula par $t \leq 0$, con todas las derivadas en L^2 y tal que $|\hat{f}| = \hat{f}$ es condición necesaria y suficiente que $t^k \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$,

$n=0,1,\dots$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \hat{f}(t)|}{1+t^2} dt < \infty$

De aquí se puede deducir la caracterización de la no cuasianaliticidad de $D^\lambda(\mathbb{R})$ que se buscaba:

Teorema 2.- La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe $\hat{f} \geq 0$ c.p.t. tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \hat{f}(t)|}{1+t^2} dt < \infty$, $t^k \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ $n=0,1,\dots$ y $(\|t^k \hat{f}\|_2)_k \in \lambda$.

Este último teorema servirá para dar una caracterización de la cuasianaliticidad de la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ sin salir del espacio λ .

Teorema 3.- La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe $v = (v_n) \in \lambda$ tal que, si $T_v(r) = \sup \frac{r^n}{v_n}$, $r \geq 0$, es

$$\int_1^\infty \frac{\log T_v(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Para la demostración del teorema, supongamos que $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica y sea ϕ como en el teorema 2. Tomemos $v_n = \|t^n \phi\|_2$ y pasemos a comprobar la divergencia de la integral:

$$\begin{aligned} \log \frac{r^n}{v_n} &= -\frac{1}{2} \log \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{2n} |\phi(t)|^2 dt \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \log \int_r^{r+1} \left(\frac{t}{r}\right)^{2n} |\phi(t)|^2 dt \leq -\frac{1}{2} \log \int_r^{r+1} |\phi(t)|^2 dt \leq \\ &\leq -\int_r^{r+1} \log |\phi(t)| dt \leq \int_r^{r+1} |\log \phi(t)| dt. \end{aligned}$$

Esto es válido para cada n , por tanto

$$\int_1^\infty \frac{\log T_V(r)}{r^2} dr \leq \int_1^\infty \frac{dr}{r^2} \int_r^{r+1} |\log \phi(t)| dt < \infty.$$

Para el recíproco supongamos que $v \in \lambda$ hace la integral convergente. Entonces, la función ϕ definida por

$$\phi^2(t) = \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{T_V^2(|t|)}$$

está en las condiciones del teorema 2. //

Resumiendo:

Teorema: Las condiciones siguientes son equivalentes

- (a) la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica.
- (b) $\exists F$ holomorfa en π^+ tal que $z^n F \in H^2(\pi^+)$ y $(\|z^n F\|_2)_n \in \lambda$.
- (c) existe $\phi \geq 0$ c.p.t. tal que $t^n \phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $(\|t^n \phi\|_2)_n \in \lambda$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \phi(t)|}{1+t^2} dt < \infty$.
- (d) existe $v \in \lambda$ tal que $\int_1^\infty \frac{\log T_V(v)}{r^2} dr < \infty$, donde

$$T_V(r) = \sup \frac{r^n}{v_n}$$

las clases clásicas corresponden a $\lambda = M_n h[0]$.

Entonces (d) equivale a

$$(e) \text{ Si } T(r) = \sup \frac{r^n}{M_n}, \int_1^{\infty} \frac{\log T(v)}{v^2} dv < \infty.$$

B I B L I O G R A F I A

- [1] PALEY and WIENER " Fourier transforms in the complex domain"
A.M.S. (Collog. Publ., XIX)
- [2] HOFFMAN, K. "Banach Spaces of Analytic Functions" Prentice-Hall
(Series in Modern Analysis)
- [3] CUFI, J y CERDA, J.L. "Algunas clases de funciones diferenciales". Aparecerá en Collectanea.