Publicacions Matemàtiques, Vol **39** (1995), 285–299.

DÉCOMPOSITION ATOMIQUE DES ESPACES DE BERGMAN

F. Symesak

Abstract

The aim of this paper is to establish the theorem of atomic decomposition of weighted Bergman spaces $A^p(\Omega)$, where Ω is a domain of finite type in $\mathbb{C}^2$. We construct a kernel function $H(z,w)$ which is a reproducing kernel for $A^p(\Omega)$ and we prove that the associated integral operator H is bounded in $L^p(\Omega)$.

1. Introduction et énoncé des résultats

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord $\mathcal{C}^\infty$ donné par $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n,\ r(z) < 0\}$. On suppose de plus que r vérifie $|\nabla r(z)| = 1$ sur $\partial\Omega = \{z;\ r(z) = 0\}$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose $A^p(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ désignant l'espace des fonctions holomorphes dans Ω. On note B la projection de Bergman qui est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur le sous espace fermé $A^2(\Omega)$. La projetée Bf de la fonction f de $L^2(\Omega)$ est donnée par

$$Bf(z) = \int_\Omega B(z,\zeta) f(\zeta) dV(\zeta),$$

où $B(z,\zeta)$ est le noyau de Bergman et dV la mesure de Lebesgue de Ω.

En 1980, R. Coifman et R. Rochberg ont introduit la notion de décomposition atomique des espaces de Bergman [**3**]. Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, ils on montré que toute fonction f de $A^p(\Omega)$ peut s'écrire

$$f(z) = \sum_i \lambda_i a_i B^q(z, w_i), \tag{1.1}$$

avec $\|f\|_p \simeq \left(\sum |\lambda_i|^p\right)^{1/p}$. Dans la relation 1.1, w_i est une suite de points choisis une fois pour toutes, q est un réel assez grand et a_i est une constante de normalisation de sorte que

$$\|a_i B^q(\cdot, w_i)\|_p = 1.$$

Ainsi $A^p(\Omega)$ apparaît comme "engendré" par les $B^q(\cdot, w_i)$, mais on ne peut pas parler de base, la décomposition atomique n'étant pas unique.

Cette décomposition a été généralisée par B. Coupet aux domaines strictement pseudo-convexes en remplaçant $B^q(z,\zeta)$ par un noyau de Henkin convenable [**4**].

Notre but est de montrer que les espaces de Bergman possèdent une décomposition atomique lorsque $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ est un domaine pseudo-convexe de type fini $m \geq 2$. Dans ce cas, le noyau de Bergman a été étudié par A. Nagel, J.-P. Rosay, E. Stein et S. Wainger [**9**] et par J. Mac-Neal [**8**]. Il est lié à la géométrie du domaine qui a été décrite par D. Catlin [**1**]. A tout point z dans un voisinage du bord $U = \{z \in \mathbb{C}^2,\, |r(z)| < \varepsilon\}$, on peut associer un changement de variables Φ_z, et la quantité $\tau(z,\delta)$, $\delta > 0$, qui traduit l'applatissement du domaine aux points de faible pseudo-convexité. On peut alors considérer la famille de polydisques $R(z,\delta)$ définis par $R(z,\delta) = \{\zeta \in \mathbb{C}^2,\, \zeta = (\zeta_1,\zeta_2),\, |\zeta_1| \leq \tau(z,\delta)$ et $|\zeta_2| \leq \delta\}$ pour définir dans U la pseudo-distance $d_0(z,\delta)$ par

$$d_0(z,\zeta) = \inf\{\delta > 0,\, \zeta \in Q(z,\delta)\},$$

où $Q(z,\delta) = \{\Phi_z(\zeta),\, \zeta \in R(z,\delta)\}$. Cette pseudo-distance n'étant définie que dans un voisinage du bord, on la prolonge à $\mathbb{C}^2$ à l'aide de la distance euclidienne. On considère $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^2)$ telle que $\psi(z,\zeta) = 1$ lorsque $|r(z)| \leq \varepsilon/2$ et $|r(\zeta)| \leq \varepsilon/2$ et $\psi(z,\zeta) = 0$ lorsque $|r(z)| \geq \varepsilon$ ou $|r(\zeta)| \geq \varepsilon$.

Définition. Soient z et ζ dans $\mathbb{C}^2$. On note

$$d(z,\zeta) = \psi(z,\zeta)d_0(z,\zeta) + (1-\psi(z,\zeta))|z-\zeta|.$$

Cette pseudo-distance permet de définir la quantité $D(z,\zeta)$ suivante: pour tout point z dans Ω, on note $\delta(z) = \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ et on pose

$$D(z,\zeta) = d(\pi(z),\pi(\zeta)) + \delta(\zeta) + \delta(z),$$

où $\pi(z)$ et $\pi(\zeta)$ sont les projetés de z et ζ sur $\partial\Omega$.

Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, $B^q(z,\zeta)$ est aussi le noyau de Bergman à poids $B_{q'}(z,\zeta)$ pour q' convenable. Pour les domaines pseudo-convexes de type fini de $\mathbb{C}^2$, on va construire un noyau reproduisant pour les fonctions holomorphes. Ce noyau $H_n(z,\zeta)$, qui joue le rôle de $B^q(z,\zeta)$, est obtenu à partir du noyau de Bergman $B(z,\zeta)$ en faisant une dérivation selon un champ anti-holomorphe complexe normal. Le fait qu'il soit reproduisant pour la mesure $dV_n(z) = (-r(z))^n dV(z)$ découle d'une intégration par parties. On utilise les résultats de A. Nagel, J.-P. Rosay, E. Stein et S. Wainger [**9**] pour obtenir, pour $H_n(z,\zeta)$, les estimations asymptotiques suivantes:

Proposition A. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier l, il existe $C(l) > 0$ tel que*

$$|Y_1 \dots Y_l H_n(z,\zeta)| \le C(l) D(z,\zeta)^{-2-n-n_2} \tau(z, D(z,\zeta))^{-2-n_1},$$

où $Y_1, \dots, Y_l$ sont des éléments de $\{\bar{N}, N, \bar{L}, L\}$ parmi lesquels il y a n_1 champs L ou $\bar{L}$ et $n_2 = l - n_1$ champs N ou $\bar{N}$.

On note H_n l'opérateur intégral défini à partir de $H_n(z,\zeta)$ par

$$H_n f(z) = \int_\Omega H_n(z,\zeta) f(\zeta) dV_n(\zeta) \text{ pour tout } f \in L^1(\Omega).$$

On pose $\mu(z) = \tau(z, \delta(z))$ lorsque $z \in \Omega \cap U$ et $\mu(z) = 1$ sinon. Pour $\alpha > -1$, on note $dV_\alpha(z) = (-r(z))^\alpha dV(z)$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha) = L^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ et on note $\| \cdot \|_{\alpha,\beta,p}$ sa norme. Comme Ω est un domaine de type fini m, il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \delta^{1/2} \le \tau(z,\delta) \le \delta^{1/m} c_2 \tag{1.2}$$

pour tout z dans $\Omega \cap U$ et pour tout $0 < \delta < 1$ [**1**]. On note h la fonction définie par $h(x) = 2$ si $x \le 0$ et $h(x) = m$ si $x > 0$. Les estimations données par la Proposition A et le critère de Schur permettent de montrer que H_n se prolonge en un opérateur continu dans $L^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$, quand $1 < p < +\infty$ [**6**] et [**10**].

Proposition B. *Soient $1 < p < +\infty$, α et β tels que $1 + \alpha + \frac{\beta}{h(\beta)} > 0$. Il existe $n_0 = n_0(\alpha, \beta, p)$ tel que pour $n > n_0$*

$$H_n \textit{ est un opérateur continu dans } L^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha).$$

Proposition C. *Soient $0 < p < +\infty$, α et β tels que $1 + \alpha + \frac{\beta}{h(\beta)} > 0$. Il existe $n_0 = n_0(\alpha, \beta, p)$ tel que pour $n > n_0$*

$$F(z) = \int_\Omega H_n(z,\zeta) F(\zeta) dV_n(\zeta) \textit{ pour tout } F \textit{ dans } A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha). \tag{1.3}$$

On utilise le noyau $H_n(z,\zeta)$ et la formule de représentation intégrale précédente pour montrer le théorème de décomposition atomique des espaces de Bergman. Bien que les espaces de Bergman classiques soient les espaces $A^p(dV_\alpha)$, $\alpha > -1$ [**3**] et [**4**], le théorème suivant donne la décomposition des espaces $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$, lorsque $(-r(\zeta))^\alpha \mu(z)^\beta$ est un poids intégrable car ils interviennent dans la caractérisation des opérateurs de Hankel.

Théorème D. *Soient* $0 < p < +\infty$, α, β *tels que* $1 + \alpha + \frac{\beta}{h(\beta)} > 0$. *Il existe une suite* $K_i(z)$ *dans* $A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha)$ *telle que pour tout* F *dans* $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$, *il existe* $(\lambda_i) \in \ell^p$ *telle que*

(i) $F(z) = \sum_i \lambda_i K_i(z)$,

(ii) $1/C \left(\sum_i |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \leq \|F\|_{\alpha,\beta,p} \leq C \left(\sum_i |\lambda_i|^p \right)^{1/p}$.

Dans le Théorème D, les fonctions K_i sont définies à partir du noyau $H_n(z, \zeta)$ pour un indice n assez grand. Suivant R. Coifman et R. Rochberg, on démontre le Théorème D en approchant la fonction F. Pour cela, on discrétise la relation 1.3 pour obtenir une somme de Riemann adaptée. On construit une suite de points (w_i) liée à un recouvrement de Whitney du domaine pour la pseudo-distance d. Lorsque le recouvrement est constitué par des domaines suffisamment petits, la fonction G, obtenue en considérant la somme de Riemann associée au recouvrement, vérifie $\|F - G\|_{\alpha,\beta,p} \leq 1/2 \|F\|_{\alpha,\beta,p}$. On conclut par un argument d'analyse fonctionnelle.

2. Projecteurs à poids

Le but de cette partie est de construire le noyau $H_n(z, \zeta)$ qui est reproduisant pour les éléments de $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$ puis d'établir des estimations asymptotiques. Le noyau $H_n(z, \zeta)$ est obtenu à partir du noyau de Bergman à l'aide d'intégrations par parties. Pour tout point p sur $\partial\Omega$, on note L le champ holomorphe tangent en p à $\partial\Omega$ défini par

$$L = \frac{\partial r}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial r}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}$$

et N le champ holomorphe normal

$$N = 2 \left(\frac{\partial r}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right).$$

En particulier $|Nr| = 1$ sur $\partial\Omega$.

Pour construire $H_n(z, \zeta)$, on part du fait que le noyau de Bergman est un noyau reproduisant pour les éléments de $A^2(\Omega)$. Ainsi $F \in A^2(\Omega)$ vérifie

$$F(z) = \int_\Omega B(z, \zeta) F(\zeta) dV(\zeta). \tag{2.4}$$

Comme $|\nabla r| = 1$ sur $\partial\Omega$, il existe deux fonctions $a(\zeta)$ et $b(\zeta)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ telles que $1 = a(\zeta)\bar{N}r(\zeta) + b(\zeta)r(\zeta)$. On obtient le noyau $H_n(z,\zeta)$ par récurrence. On pose $H_0(z,\zeta) = B(z,\zeta)$ et on obtient $H_n(z,\zeta)$ à partir de $H_{n-1}(z,\zeta)$ en posant, pour F dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_\Omega H_{n-1}(z,\zeta)F(\zeta)dV_{n-1}(\zeta)\\
&= -\frac{1}{n}\int_\Omega a(\zeta)H_{n-1}(z,\zeta)F(\zeta)\bar{N}(-r(\zeta)^n)dV(\zeta)\\
&\quad - \int_\Omega H_{n-1}(z,\zeta)b(\zeta)F(\zeta)dV_n(\zeta)\\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$I_1 = \frac{1}{n}\int_\Omega \left(a(\zeta)\bar{N}_\zeta H_{n-1}(z,\zeta) + (\bar{N}_\zeta a(\zeta) + \frac{1}{4}a(\zeta)\Delta r(\zeta))H_{n-1}(z,\zeta)\right) F(\zeta)dV_n(\zeta).$$

On obtient alors

$$H_n(z,\zeta) = \frac{a(\zeta)}{n}\bar{N}_\zeta H_{n-1}(z,\zeta) + \left(\frac{\bar{N}_\zeta a(\zeta) + \Delta r(\zeta)/4}{n} - b(\zeta)\right)H_{n-1}(z,\zeta).$$

Pour montrer la Proposition A, on commence par noter qu'il existe $a_0, \ldots, a_n$ dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ telles que

$$H_n(z,\zeta) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\zeta)\bar{N}^i B(z,\zeta). \tag{2.5}$$

On utilise le résultat suivant [**9**]: Soient $Y_1, \ldots, Y_l$ des éléments de $\{\bar{N}, N, \bar{L}, L\}$. On suppose qu'il y a n_1 champs L ou $\bar{L}$ et $n_2 = l - n_1$ champs N ou $\bar{N}$. Il existe $C(l) > 0$ tel que

$$|Y_1 \ldots Y_l B(z,\zeta)| \leq \frac{C(l)D(z,\zeta)^{-n_2}\tau(z,D(z,\zeta))^{-n_1}}{\mathrm{Vol}(Q(z,D(z,\zeta)))}.$$

3. Propriétés de l'opérateur H_n

Dans cette partie, on montre que H_n se prolonge en un opérateur continu dans certains L^p pour $1 < p < +\infty$. Dans le cas $n = 0$, il est bien connu que le projecteur de Bergman est un opérateur continu dans L^p, $1 < p < +\infty$ [**9**]. Pour les opérateurs H_n, la démonstration de la Proposition B repose sur le critère de Schur qui permet de donner une condition suffisante pour qu'un opérateur défini à partir d'un noyau positif soit borné dans $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$ [**3**] et [**10**]. On va utiliser ce critère avec la fonction $g(\zeta) = \delta(\zeta)^a$ pour a dans $]-1, 0[$ convenablement choisi. On commence par prouver le résultat suivant:

Lemme 3.1. *Pour tous a et b tels que $0 < 1+a+\frac{b}{h(b)}$ et $a-n+\frac{b}{h(-b)} < 0$, il existe $C = C(a,b) > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega$,*

$$\int_\Omega |H_n(z,\zeta)|\delta(\zeta)^a\mu(\zeta)^b dV(\zeta) \leq C\delta(z)^{a-n}\mu(z)^b.$$

Démonstration: Il suffit de considérer le cas où $z \in U \cap \Omega$. Le lemme repose sur un découpage de Ω en tentes $B_l = Q(\pi(z), 2^l\delta(z)) \cap \Omega$. Dans ce cas

$$\int_\Omega |H_n(z,\zeta)|\mu(\zeta)^\beta\delta(\zeta)^a dV(\zeta) \leq \int_{B_1} |H_n(z,\zeta)|\mu(\zeta)^\beta\delta(\zeta)^a dV(\zeta) + \sum_{l=2}^{+\infty}\int_{B_l\setminus B_{l-1}} |H_n(z,\zeta)|\mu(\zeta)^\beta\delta(\zeta)^a dV_n(\zeta).$$

Sur B_1, on utilise le fait que $|H_n(z,\zeta)| \leq |H_n(z,\pi(z))| \leq C\mu(z)^{-2}\delta(z)^{-2-n}$ pour obtenir

$$\int_{B_1} |H_n(z,\zeta)|\delta(\zeta)^a\mu(\zeta)^b dV(\zeta) \leq C\delta(z)^{a-n}\mu(z)^b.$$

Pour estimer les autres termes, il suffit de noter que pour tout ζ dans $B_l\setminus B_{l-1}$, $\delta(\zeta) \simeq 2^l\delta(z)$ et que, d'après la relation 1.2, $c_1 2^{l/m}\mu(\zeta) < \mu(\pi(\zeta), 2^l\delta(\zeta)) < c_2 2^{l/2}\mu(\zeta)$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_l\setminus B_{l-1}} |H_n(z,\zeta)|\delta(\zeta)^a\mu(\zeta)^b dV_n(\zeta) &\leq C\delta(z)^{a-n}\mu(z)^b 2^{(a-n)l+\frac{b}{h(-b)}}\frac{\mathrm{Vol}(B_l)}{\mathrm{Vol}(B_{l-1})}\\ &\leq C\delta(z)^{a-n}\mu(z)^b 2^{(a-n)l+\frac{bl}{h(-b)}}.\end{aligned}$$

Soient p et p' tels que $1/p + 1/p' = 1$. Pour montrer que H_n est un opérateur borné dans $L^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$, on montre que l'opérateur $\tilde{H}_n$ défini par

$$\tilde{H}_n f(z) = \int_\Omega |H_n(z,\zeta)| \left(\frac{\delta(\zeta)^{n-\alpha}\mu(\zeta)^{-\beta}}{\delta(z)^{n-\alpha}\mu(z)^{-\beta}}\right)^{1/p} f(\zeta) dV_n(\zeta)$$

est borné dans $L^p(dV_n)$. Pour cela on utilise le critère de Schur: il s'agit alors de montrer qu'il existe $g(z) = \delta(z)^a$ tel que

$$\left(\delta(z)^{\alpha-n}\mu(z)^\beta\right)^{1/p}\int_\Omega |H_n(z,\zeta)|\delta(\zeta)^{n+(n-\alpha)/p+p'a}\mu(\zeta)^{-\beta/p} dV(\zeta) \leq Cg(z)^{p'}$$

$$\left(\delta(\zeta)^{n-\alpha}\mu(\zeta)^{-\beta}\right)^{1/p}\int_\Omega |H_n(z,\zeta)|\delta(z)^{n+(\alpha-n)/p+pa}\mu(z)^{\beta/p} dV(z) \leq Cg(\zeta)^p.$$

Les deux conditions sont réalisées en vertu du Lemme 3.1 est choisi tel que

$$(n-\alpha)/p+\frac{-\beta/p}{h(\beta)}<-p'a<n+1+(n-\alpha)/p-\frac{\beta/p}{h(-\beta)}$$

et

$$(\alpha-n)/p+\frac{\beta/p}{h(-\beta)}<-pa<n+1+(\alpha-n)/p+\frac{\beta/p}{h(\beta)}.$$

Pour que a existe, il est nécessaire et suffisant que $1+\alpha+\frac{\beta}{h(\beta)}>0$ et n verifie $n>n_1(\alpha,\beta,p)=\frac{1}{p}\left(\alpha+\frac{\beta}{h(-\beta)}\right)+\frac{1}{p}-1$.

Soit f dans $L^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$. La fonction $f_1(\zeta)=f(\zeta)\delta(\zeta)^{(\alpha-n)/p}\mu(\zeta)^{\beta/p}$ est dans $L^p(dV_n)$ et $\|f\|_{\alpha,\beta,p}=\|f_1\|_{n,0,p}$. L'opérateur $\tilde{H}_n$ étant continu dans $L^p(dV_n)$, il existe $C>0$ tel que $\|\tilde{H}_n f_1\|_{n,0,p}\leq C\|f_1\|_{n,0,p}$. Il reste à noter que $\|Hf\|_{\alpha,\eta,p}\leq\|\tilde{H}_n f_1\|_{n,0,p}$ pour achever la démonstration de la Proposition B. ■

4. Formule de représentation intégrale

Dans cette partie, on donne une condition sur n pour que $H_n(\zeta,z)$ soit un noyau reproduisant pour les fonctions de $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$. Pour cela on utilise le lemme d'inclusion qui suit mais qui n'est probablement pas optimal.

Lemme 4.1. *Soient* $0<p<+\infty$, α *et* β *tels que* $1+\alpha+\frac{\beta}{h(\beta)}>0$. *Il existe* $n_2=n_2(\alpha,\beta,p)$ *tel que pour* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $n>n_2$,

$$A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha)\subseteq A^2(dV_n).$$

Démonstration du lemme: Lorsque $p>2$, l'inclusion est une conséquence de la relation de Hölder et $n_2=\frac{2}{p}\left(\alpha+\frac{\beta}{h(-\beta)}\right)+\frac{2}{p}-1$. Pour $0<p\leq 2$, le domaine Ω étant un domaine de nature homogène au sens de R. Coifman et G. Weiss, on considère un recouvrement de Whitney de Ω par des domaines $Q(z,\theta\delta(z))$, $\theta>0$ suffisamment petit de sorte que pour tout z, $Q(z,\theta\delta(z))\subset\Omega$ [**2**]. Pour tout élément Q_i du recouvrement, on note z_i le centre Q_i. On pose aussi $\bar{Q}_i=Q(z_i,C_0\theta\delta(z_i))$. Comme les Q_i forment un recouvrement de Whitney, on choisit C_0 pour que les $\tilde{Q}_i=Q(z_i,\theta\delta(z_i)/C_0)$ soient deux à deux disjoints. Soit $F\in A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$. Pour tout point z dans Q_i, on part de l'inégalité suivante qui découle de la sous-harmonicité de $|F|^p$:

$$|F(z)|^p\leq\frac{C}{\mathrm{Vol}(\bar{Q}_i)}\int_{\bar{Q}_i}|F(\zeta)|^p dV(\zeta).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\|F\|^2_{n,0,2} &\le \sum_i \int_{Q_i} |F(\zeta)|^2 \delta(\zeta)^n dV(\zeta) \\ &\le \sum_i \delta(z_i)^{n-2\alpha/p} \mu(z_i)^{-2\beta/p} \mathrm{Vol}(Q_i)^{1-2/p} \left(\int_{\bar{Q}_i} |F(\zeta)|^p \mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(\zeta) \right)^{2/p}.\end{aligned}$$

Les domaines $\bar{Q}_i$ étant presques disjoints, $\|F\|_{n,0,2} \le C\|F\|_{\alpha,\beta,p}$ dès que

$$n \ge n_2 = \frac{2}{p}\left(\alpha + \frac{\beta}{h(p-2-\beta)}\right) + 2\left(\frac{2}{p} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{h(p-2-\beta)}\right). \quad \blacksquare$$

Citons le corollaire suivant:

Corollaire 4.2. *Soient $0 < p < +\infty$, α, β tels que $1 + \alpha + \frac{\beta}{h(\beta)} > 0$, n entier tel que $n > n_2$. Toute fonction F de $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$ vérifie*

$$F(z) = \int_\Omega H_n(z,\zeta) F(\zeta) dV_n(\zeta).$$

Démonstration du corollaire: On note $\rho(z) = -(-r(z))^{1/k}$, où k est un entier assez grand de sorte que le Théorème 1 de [**5**] soit vérifié. Un résultat de Ligocka assure que l'opérateur de Bergman à poids B_s associé à la mesure $(-\rho(z))^s dV(z)$ est continu dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ [**7**]. En particulier on en déduit que $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ est dense dans $A^2(dV_n)$. D'après le lemme précédent, F est dans $A^2(dV_n)$. Soit F_ν une suite d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ approchant F. Alors, pour tout ν, $H_n F_\nu = F_\nu$. On obtient la formule de représentation intégrale en notant que H_n est continu dans $L^2(dV_n)$. $\blacksquare$

5. Décomposition atomique

Pour établir le Théorème D pour, on va utiliser la formule de représentation intégrale donnée par le Corollaire 4.2 pour approcher une fonction F de $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$. On considère un recouvrement de Whitney de Ω par des domaines Q_i de la forme $Q(w, \eta\theta\delta(w))$, $0 < \eta < 1$ et on note w_i les centres de ces domaines. Cette suite, selon la terminologie de R. Coifman et R. Rochberg, est appelée un η-réseau sur Ω. On pose $\tilde{Q}_i = Q(w_i, \eta\theta\delta(w_i)/C_0)$ et on définit les fonctions $K_i(z)$ par

$$K_i(z) = \delta(w_i)^{n-\alpha/p} \mu(w_i)^{-\beta/p} \,\mathrm{Vol}(Q(w_i, \theta\delta(w_i))^{1-1/p} H_n(z, w_i),$$

où n est un entier tel que $n > n_2$. La Proposition A et un découpage de Ω en tentes B_l perment de montrer que K_i est un élément de $A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$ dès que

$$n > n_3(\alpha,\beta,p) = \frac{1}{p}\left(\alpha + \frac{\beta}{h(2(p-1)-\beta)}\right) + 2\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(1+\frac{1}{h(2(p-1)-\beta)}\right).$$

On construit une fonction G qui approche la fonction F de la façon suivante:

Proposition 5.1. *Soient* $0 < p < +\infty$, α, β *tels que* $1+\alpha+\frac{\beta}{h(\beta)} > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$. *Pour tout* $F \in A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$, *il existe* $G \in A^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$ *telle que*

(i) $G(z) = \sum_i \nu_i K_i(z)$, *où* (ν_i) *est une suite de* ℓ^p,

(ii) $\|F-G\|_{\alpha,\beta,p} \leq \frac{1}{2}\|F\|_{\alpha,\beta,p}$.

Démonstration: Les domaines $\tilde{Q}_i$ étant deux à deux disjoints, on associe à la suite (w_i) un recouvrement de Ω par des domaines deux à deux disjoints E_i dont on sait estimer le volume. On pose $E_0 = Q_0 \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \tilde{Q}_i\right)$ et, pour tout indice i, on note

$$E_i = Q_i \backslash \left(\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=i+1}^{+\infty} \tilde{Q}_i\right)\right).$$

Il est immédiat que $\tilde{Q}_i \subseteq E_i \subseteq Q_i$, que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i = \Omega$ et que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On obtient la fonction G en discrétisant la formule de représentation intégrale donnée par le Corollaire 4.2. Ainsi

$$G(z) = \sum_i F(w_i)\,\mathrm{Vol}_n(E_i) H_n(z,w_i). \tag{5.6}$$

Dans ce cas $\nu_i = \frac{F(w_i)\,\mathrm{Vol}_n(E_i)}{\delta(w_i)^{n-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}\,\mathrm{Vol}(E_i)^{1-1/p}}$. On montre que la suite (ν_i) est un élément de ℓ^p en notant que, pour tout indice i, $\mathrm{Vol}_n(E_i) \simeq$

$\delta(w_i)^n \operatorname{Vol}(E_i)$ et que $|\nu_i|^p \leq C \operatorname{Vol}(\tilde{Q}_i)|F(w_i)|^p \delta(w_i)^\alpha \mu(w_i)^\beta$. La sous harmonicité de $|F|^p$ entraîne

$$\sum_i |\nu_i|^p \leq C \sum_i \int_{\tilde{Q}} |F(\zeta)|^p \mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(\zeta) \leq C\|F\|^p_{\alpha,\beta,p}$$

car les $\tilde{Q}_i$ sont deux à deux disjoints. Afin d'estimer $\|F-G\|_{\alpha,\beta,p}$ on écrit

$$\begin{aligned} |F(z)-G(z)| &\leq \sum_i |H_n(z,w_i)| \int_{E_i} |F(\zeta)-F(w_i)| dV_n(\zeta) \\ &\quad + \sum_i \int_{E_i} |F(\zeta)|\, |H_n(z,w_i)-H_n(z,\zeta)| dV_n(\zeta) \\ &\leq S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Pour estimer S_1 et S_2 en fonction de $\eta^{1/m}$, on commence par montrer le résultat suivant:

Lemme 5.2. *Il existe $\gamma \geq 1$ et $C > 0$ tels que pour tout z dans U, $w \in Q(z,\theta\delta(z))$ et η assez petit de sorte que $Q(w,\eta\theta\delta(w)) \subset Q(z,\theta\delta(z))$,*

(i) $$\sup_{\zeta\in Q(w,\eta\theta\delta(w))} |F(\zeta)-F(w)|^p \leq \frac{C\eta^{p/m}}{\operatorname{Vol}(Q(z,\theta\delta(z)))} \int_{\bar{Q}} |F(\zeta)|^p dV(\zeta),$$
où $\bar{Q} = Q(z,\gamma\theta\delta(z))$,

(ii) $$\sup_{\zeta\in Q(w,\eta\theta\delta(w))} |H_n(z,\zeta)-H_n(z,w)| \leq C\eta^{1/m} D(z,w)^{-2-n} \tau(z,D(z,w))^{-2}.$$

Démonstration: Pour obtenir (i), on rappelle que si on considère P_1 un polydisque de $\mathbb{C}^2$ de centre 0 et de rayon (R_1,R_2) contenant un polydisque P_2 de centre 0 et de rayon (r_1,r_2) de mêmes directions que P_1 et que l'on suppose que $0 < r_1 \leq \xi R_1$ et $0 < r_2 \leq \xi R_2$ où $0 < \xi < 1/4$, il existe $C > 0$, indépendant de ξ tel que pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de $\bar{P}_1$,

$$\sup_{z\in P_2} |f(z)-f(0)|^p \leq \frac{C\xi^p}{\operatorname{Vol}(P_1)} \int_{P_1} |f(\zeta)|^p dV(\zeta). \tag{5.7}$$

Soit $w \in U$. Pour majorer $|F(\zeta)-F(w)|$ sur $Q(w,\eta\theta\delta(w)))$, on considère Φ_w, le changement de variable associé au point w et on définit la fonction F_w sur $R(w,\theta\delta(w))$ par $F_w(u) = F(\Phi_w(u))$. La relation 5.7 avec les polydisques $R(w,\eta\theta\delta(w))$ et $R(w,\theta\delta(w))$ entraîne

$$\sup_{R(w,\eta\theta\delta(w))} |F_w(u)-F_w(0)|^p \leq \frac{C\eta^{p/m}}{\operatorname{Vol}(R(w,\theta\delta(w)))} \int_{R(w,\theta\delta(w))} |F_w(\zeta)|^p dV(\zeta).$$

Quitte à réduire θ, il existe $\gamma \geq 1$ tel que $\Phi_w((w, \theta\delta(w))) \subseteq Q(z, \gamma\theta\delta(z)) \subset \Omega$, ce qui donne l'estimation cherchée.

Pour démontrer la partie (ii), on utilise la relation 2.5 pour écrire

$$\begin{aligned} |H_n(z,\zeta) - H_n(z,w)| \leq & \sum_{l=0}^{n} |\bar{N}^l B(z,w)|\, |a_l(\zeta) - a_l(w)| \\ & + \sum_{l=0}^{n} |a_l(\zeta)|\, |\bar{N}^l B(z,\zeta) - \bar{N}^l B(z,w)|. \end{aligned}$$

La majoration de la première somme découle de la Proposition A et du fait que les a_l ont des dérivées bornées. Pour la seconde, on utilise le résultat suivant:

Lemme 5.3. *Soient l dans $\mathbb{N}$. Il existe $C(l) > 0$ tel que pour tout z dans U, w dans $Q(z, \theta\delta(z))$ et $\eta > 0$ assez petit tels que $Q(w, \eta\theta\delta(w)) \subset Q(z, \theta\delta(z))$,*

$$\sup_{\zeta \in Q(w,\eta\theta\delta(w))} |\bar{N}^l B(z,\zeta) - \bar{N}^l B(z,w)| \leq C(l)\eta^{1/m} D(z,w)^{-l-2} \tau(z, D(z,w))^{-2}.$$

Démonstration du lemme: On définit la fonction b_l par $b_l(u) = \bar{N}^l B(z, \Phi_w(u))$. Si on note $u = (u_1, u_2)$, comme $|b_l(u) - b_l(0)| \leq |b_l(u_1, u_2) - b_l(u_1, 0)| + |b_l(u_1, 0) - b_l(0)|$, il s'agit d'estimer

$$\sup_{R(w,\eta\theta\delta(w))} |b_l(u_1,u_2) - b_l(u_1,0)| \text{ et } \sup_{R(w,\eta\theta\delta(w))} |b_l(u_1,0) - b_l(0)|.$$

Le premier terme est majoré par

$$\eta\delta(w) \sup_{R(w,\eta\theta\delta(w))} \left(\left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial u_1} \right| + \left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial \bar{u}_1} \right| \right).$$

D'après la Proposition A, si on note $v = \Phi_w(u)$, alors

$$\left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial u_2} \right| + \left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial \bar{u}_2} \right| \leq D(z,u)^{-3-l} \tau(z, D(z,v))^{-2}.$$

Il suffit ensuite de noter que dans $Q(z, \theta\delta(z))$, $D(z,v) \simeq D(z,w)$ et $\tau(z,v) \simeq \tau(z,w)$.

Pour majorer le second terme, il faut estimer

$$\tau(w, \eta\delta(w)) \sup_{R(w,\eta\theta\delta(w))} \left(\left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial u_2} \right| + \left| \frac{\partial b_l(u)}{\partial \bar{u}_2} \right| \right).$$

On procède de manière identique en utilisant cette fois le fait que, d'après la Proposition A,

$$\left|\frac{\partial b_l(u)}{\partial u_2}\right| + \left|\frac{\partial b_l(u)}{\partial \bar{u}_2}\right| \leq CD(z,u)^{-2-l}\tau(z,D(z,v))^{-3}. \quad \blacksquare$$

Pour majorer S_1 et S_2 par $\|F\|_{\alpha,\beta,p}$, on définit le noyau positif $C_n(z,\zeta)$ par

$$\begin{array}{ll} C_n(z,\zeta) = \tau(z,D(z,\zeta))^{-2}D(z,\zeta)^{-2-n} & \text{si } z \text{ et } \zeta \text{ dans } U\cap\Omega \\ C_n(z,\zeta) = 1 & \text{sinon.} \end{array}$$

Ceci permet de définir, pour tout i, la fonction $L_i(z)$ par

$$L_i(z) = \delta(w_i)^{n-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}\,\mathrm{Vol}(Q(w_i,\theta\delta(w_i))^{1-1/p}C_n(z,w_i).$$

Comme pour K_i, il existe $C>0$ tel que pour tout i, $\|L_i\|_{\alpha,\beta,p} \leq C$ pour $n > n_3$. Il est immédiat qu'il existe $C>0$ indépendant de η et de F tel que

$$S_2 \leq C\eta^{1/m}\sum_i \left(\int_{\bar{Q}_i} |F(\zeta)|^p\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(\zeta)\right)^{1/p} L_i(z),$$

où $\bar{Q}_i = Q(w_i,\gamma\theta\delta(w_i))$.

On obtient une majoration identique pour S_1, en notant que dans $Q(z,\gamma\theta\delta(z))$, $\delta(\zeta)\simeq\delta(w)$ et $\mu(\zeta)\simeq\mu(w)$. Ceci donne, compte tenu du Lemme 5.2,

$$\int_{E_i} |F(\zeta)| - F(w_i)|dV_n(\zeta) \leq \frac{C\eta^{1/m}\delta(w_i)^{n-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}}{\mathrm{Vol}(Q(w_i,\theta\delta(w_i)))^{1/p-1}} \left(\int_{\bar{Q}_i} |F(\zeta)|^p\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(\zeta)\right)^{1/p}.$$

D'après la Proposition A, $|H_n(z,\zeta)| \leq CC_n(z,w_i)$ pour tout ζ dans E_i, donc

$$S_1 \leq C\eta^{1/m}\sum_i \left(\int_{\bar{Q}_i} |F(\zeta)|^p\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(\zeta)\right)^{1/p} L_i(z).$$

On utilise alors le résultat suivant pour conclure:

Proposition 5.4. *Soient* $0<p<+\infty$, α, β *tels que* $1+\alpha+\frac{\beta}{h(\beta)} > 0$ *et*

$$n > n_3 \text{ si } 0 < p \leq 1$$
$$n > n_1 \text{ si } 1 < p < +\infty.$$

Il existe $C>0$ tel que pour tout suite (λ_i) de ℓ^p,

$$\left\|\sum_i \lambda_i L_i\right\|_{\alpha,\beta,p} \leq C\left(\sum_i |\lambda_i|^p\right)^{1/p}.$$

Démonstration de la proposition: Dans ce cas $0<p\leq 1$, il suffit de remarquer que

$$\left\|\sum_i \lambda_i L_i\right\|_{\alpha,\beta,p}^p \leq C\sum_i |\lambda_i|^p \|L_i\|_{p,\alpha,\beta}^p \leq C\sum_i |\lambda_i|^p.$$

Pour $1<p<+\infty$. On définit $k(z)$ sur Ω par

$$k(z)=\sum_i |\lambda_i|\delta(w_i)^{-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}\operatorname{Vol}(E_i)^{-1/p}\mathbb{1}_{E_i},$$

de sorte que $\|k\|_{\alpha,\beta,p}\simeq\left(\sum_i |\lambda_i|^p\right)^{1/p}$. Comme $|H_n(z,\zeta)|\leq CC_n(z,w_i)$ sur Q_i, il existe $C>0$ tel que

$$\sum_i |\lambda_i|\delta(w_i)^{n-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}\operatorname{Vol}(\tilde{Q}_i)^{1-1/p}C_n(z,w_i)\leq CT_nk(z)$$

où T_n est l'opérateur intégral associé au noyau $C_n(z,\zeta)$. On obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_i \lambda_i L_i(z)\right| &\leq \sum_i |\lambda_i|\delta(w_i)^{n-\alpha/p}\mu(w_i)^{-\beta/p}\operatorname{Vol}(\tilde{Q}_i)^{1-1/p}C_n(z,w_i)\\ &\leq CT_nk(z).\end{aligned}$$

D'après la Proposition B, T_n est un opérateur continu dans $L^p(\mu(z)^\beta dV_\alpha)$ pour $n>n_1$ donc

$$\left\|\sum_i \lambda_i L_i\right\|_{\alpha,\beta,p}\leq \|T_nk\|_{p,\alpha,\beta}\leq C\|k\|_{\alpha,\beta,p}=C\left(\sum_i |\lambda_i|^p\right)^{1/p}. \quad \blacksquare$$

Lorsque l'on applique la Proposition 5.4 à la fonction

$$z\longrightarrow \sum_i\left(\int_{Q(z_i,\gamma\theta\delta(z_i))}|F(\zeta)|^p\mu(\zeta)^\beta(\zeta)dV_\alpha(\zeta)\right)^{1/p}L_i(z),$$

on obtient que

$$\|F-G\|_{\alpha,\beta,p} \le C\eta^{1/m}\|F\|_{\alpha,\beta,p}$$

car les $Q(z_i,\gamma\theta\delta(z_i))$, qui sont presques disjoints, entraînent que

$$\sum_i \int_{Q(z_i,\gamma\theta\delta(z_i))} |f(\zeta)|^p \mu(\zeta)^\beta dV_\alpha(z) \le C\|F\|^p_{\alpha,\beta,p}.$$

D'après la Proposition 5.4, il existe $C > 0$ tel que $\|F-G\|_{\alpha,\beta,p} \le C\eta^{1/m}\|F\|_{\alpha,\beta,p}$. Il suffit alors de choisir $0 < \eta \le (1/2C)^m$ pour obtenir

$$\|F-G\|_{\alpha,\beta,p} \le \frac{1}{2}\|F\|_{\alpha,\beta,p}.$$

Pour conclure la démonstration du Théorème D, on fixe $0 < \eta < \eta_0$, (w_i) un η-réseau sur Ω. Soient F dans $A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha)$ et G_0 la fonction discrétisée associée et donnée par la relation 5.6. Pour tout entier $N \ge 1$, on note G_N la fonction discrétisée associée à $F - \sum_0^{N-1} G_i$. On obtient alors,

$$\left\| F - \sum_{i=0}^N G_i \right\|_{\alpha,\beta,p} \le 2^{-N}\|F\|_{\alpha,\beta,p}.$$

Il suffit alors de noter que $F = \sum_0^\infty G_i$ pour achever la démonstration du Théorème D.

Dans la démonstration précédente, lorsque p, α et β sont fixés, les fonctions K_i sont définis à partir de $H_n(z,\zeta)$ póur n suffisamment grand, ce qui permet de montrer le théorème de décomposition atomique pour $n > n_2$. On part de ce résultat pour affaiblir la condition sur n et étendre la Proposition C et le Théorème D à $n_0 = n_1$. On commence par supposer $1 < p < +\infty$. Dans ce cas, lorsque l'on considère F dans $A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha)$, il existe (λ_i) dans ℓ^p telle que $F(z) = \sum_i \lambda_i K_i(z)$ et les fonctions $K_i(z)$ sont définies à partir du noyau $H_n(z,\zeta)$ pour $n > n_2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $F_N(z) = \sum_{i=0}^N \lambda_i K_i(z)$. Le Corollaire 4.2 entraîne $H_n F_N = F_N$. L'opérateur H_n étant continu pour $n > n_1$, on obtient alors la Proposition C pour $n_0 = n_1$. On en déduit alors le Théorème D pour $n_0 = n_1$ lorsque $1 < p < +\infty$.

On suppose maintenant $0 < p \le 1$, pour établir la Proposition C, il suffit de montrer l'inclusion suivante, dont la démonstration est identique à celle du Lemme 4.2:

Lemme 5.5. *Soient $0 < p \le 1$, α, β, tels que $1 + \alpha + \frac{\beta}{h(\beta)} > 0$ et n dans $\mathbb{N}$ tel que $n > n_1(\alpha,\beta,p) = \frac{1}{p}\left(\alpha + \frac{\beta}{h(-\beta)}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{h(-\beta)}\right)$. Il existe $r > 1$ et $-1 < a < rn + r - 1$ tels que*

$$A^p(\mu(\zeta)^\beta dV_\alpha) \subseteq A^r(dV_a).$$

On obtient alors la Proposition C pour $n_0 = n_1$, ce qui permet encore de prouver le Théorème D pour $n_0 = n_1$.

References

1. D. CATLIN, Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two, *Math. Zeit.* **200** (1989), 429–466.
2. R. COIFMAN ET G. WEISS, "*Analyse harmonique non commutative sur Certains Espaces Homogènes*," Lecture Notes in Mathematics **242**, Springer-Verlag, 1971.
3. R. COIFMAN ET R. ROCHBERG, Representation theorem for holomorphic and harmonic functions in L^p, S.M.F., *Asterisque* **77** (1980), 1–65.
4. B. COUPET, Décomposition atomique des espaces de Bergman, *Indiana Math. J.* **38** (1989), 917–941.
5. K. DIEDERICH ET J. E. FORNAESS, Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion function, *Invent. Math.* **39** (1977), 129–141.
6. F. FORELLI ET W. RUDIN, Projections on spaces of holomorphic functions in balls, *Indiana Univ. J.* **24(6)** (1974), 593–602.
7. E. LIGOCKA, On the Forelli-Rudin construction and weighted Bergman projection, *Studia Math.* **94** (1989), 257–272.
8. J. MAC-NEAL, Boundary behaviour of the Bergman kernel function in $\mathbb{C}^2$, *Duke Math.* **58** (1989), 499–512.
9. A. NAGEL, J.-P. ROSAY, E. STEIN ET S. WAINGER, Estimates for the Bergman and the Szegö kernel in $\mathbb{C}^2$, *Ann. of Math.* **129** (1989), 113–149.
10. K. ZHU, "*Operator Theory in function spaces*," Decker, New York, 1990.

1991 *Mathematics subject classifications*: 32F15, 32H10

Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers
FRANCE

Primera versió rebuda el 28 de Novembre de 1994,
darrera versió rebuda el 5 de Juliol de 1995