Publicacions Matemàtiques, Vol 38 (1994), 427–431.

SYSTEMES HAMILTONIENS COMPLETEMENT INTEGRABLES ET DEFORMATIONS D'ALGEBRES DE LIE

FAOUZI AMMAR

Abstract

Some of the completely integrable hamiltonian systems obtained through Adler-Kostant-Symes theorem rely on two distinct Lie algebra structures on the same underlying vector space. We study here the cases when two structures are linhed together by deformations.

1. Introduction et énoncé des résultats

Certains systèmes hamiltoniens complètement intégrables obtenus par le théorème d'Adler, Kostant et Symes [**1**] sont reliés à la théorie des déformations. Ces systèmes sont obtenus à partir de la décomposition d'une algèbre de Lie G en somme directe de deux de ses sous-algèbres (cf. aussi [**6**]). Typiquement si G est une algèbre de Lie semi simple de dimension finie qui se décompose comme espace vectoriel en $G = N^+ + H + N^-$ où H est une sous algèbre de Cartan, on lui associe une nouvelle structure d'algèbre de Lie notée G_0, définie par $G_0 = N^- \oplus (H + N^+)$ où $\oplus$ désigne la somme directe en tant qu'algèbres de Lie de la sous algèbre nilpotente N^- et de la sous algèbre résoluble $H + N^+$. Ceci revient à annuler les crochets des éléments de N^- avec les éléments de $N^+ + H$.

Let but de cet article est de montrer que l'on peut obtenir la structure de G par deux déformations successives de la structure de G_0.

Les détails des démonstrations sont à paraître dans [**2**].

Théorème 1. *Si G est une algèbre de Lie semi simple de dimension finie, de rang n, il existe une déformation formelle d'ordre 1 de G_0 en une algèbre de Lie résoluble G_U (où U est une matrice $n \times n$). G_U admet une déformation formelle à l'ordre n en G.*

Pour l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue $G = G \oplus \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ où $G = sl(2, R)$; on note $\hat{N}^+$ et $\hat{N}^-$les deux sous algèbres de Lie de $\hat{G}$ définies par:

$$\hat{N}^+ = (G \otimes t\mathbb{C}[t]) + N^+ \text{ et } \hat{N}^- = (G \otimes t\mathbb{C}[t^{-1}]) + N^-$$

et on définit $\hat{G}_0 = (\hat{N}^+ + H) \oplus \hat{N}^-$. Il existe une suite de déformations de $\hat{G}_0$ vers $\hat{G}$.

Théorème 2. *Il existe une déformation formelle d'ordre 1 de $\hat{G}_0$ en une algèbre de Lie G_Ω où Ω est une famille de nombres complexes (a_i) $i \in Z$.*

L'algèbre G_Ω admet une déformation formelle convergente vers $\hat{G}$.

Remarque. C'est le seul exemple connu de déformation formelle convergente autre que ceux obtenus dans le cadre de la théorie des déformations de crochets de Poisson pour des variétés symplectiques [**5**].

2. Cas d'une algebre de Lie semi simple classique

Fixons $\Phi = \{\alpha, \dots, \alpha_n\}$ une base de l'espace des racines et λ la plus grande racine. Le Théorème 1 va résulter des deux propositions ci-dessous:

Proposition 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, soient $K = N^+ + H$ la sous-algèbre de Borel de G associée à la décomposition et* $\operatorname{Der} N^-$ *l'espace des dérivations de N^- dans N^-, modulo les dérivations internes.*

Alors $H^2(G_0, G_0) = \operatorname{Hom}(H, \operatorname{Der} N^-) + H^2(K, \mathbb{R}_{-\lambda}) + H^2(N^-, N^-)$.

A toute application $\bar{C}$ de H à valeurs dans $\operatorname{Der} N^-$ *(voir* [**4**] *pour les détails des calculs de* $\operatorname{Der} N^-$*) on associe le cocycle C de $H \times N^-$ défini par:*

$$C(H_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i X_{\alpha_j} q.$$

Ces cocylces dépendent des paramètres (a_j^i) i, $j = 1, \dots, n$, déterminés par $\bar{C}(H_{\alpha_j})$, et chacun d'eux engendre une déformation formelle de degré 1.

Avec les notations du Théorème 1; $U = (a_j^i)$ i, $j = 1, \dots, n$.

Proposition 2. *Soient:*

- $D_1 = \{D_\alpha \in \mathrm{Der}\, N^+/D_\alpha(X_\beta) = X_{S_\alpha(\lambda)}$ *si* $\alpha = \beta$ *est une racine simple positive et* 0 *sinon* $\}$.
- $D_2 = \{D \in \mathrm{Der}\, N^-/D_\alpha(X_\beta) = X_{S_\alpha(-\lambda)}$ *si* $\alpha = \beta$ *est une racine simple négative et* 0 *sinon* $\}$.
- $W = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(H_1(N^+) \times H_1(N^-), H)/\varphi(X_\alpha, X_{-\alpha}) = H_\alpha$ *si* α *est racine simple positive,* $\varphi(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$ *sinon* $\}$.

alors $H^2(G_U, G_U) = \mathrm{Inv}_H(H^1(N^+) \otimes D_2) + \mathrm{Inv}_H(H^1(N^-) \otimes D_1) + \mathrm{Inv}_H\, W$.

On définit la $p^{\text{ième}}$ pseudodiagaonle de N^+ (resp. N^-) comme l'espace $\Delta_p^+ = \{X_\alpha/\alpha = \sum_{i=1}^{p} n_i\alpha_i$; α_i est une racine simple positive $\}$ (resp. $\Delta_p^- = \{X_\alpha/\alpha = \sum_{i=1}^{p} n_i\alpha_i)$; α_i est une racine simple négative).

On obtient une suite de cochaines définies par récurrence en posant $C_p(X, \dot{Y}) = [X, Y]$ pour X élément de la $p^{\text{ième}}$ pseudodiagonale de N^+ (resp. N^-) et Y un élément en dessous de la $p^{\text{ième}}$ pseudodiagonale de N^- (resp. N^+), (où $[\,,\,]$ désigne le crochet de G) et $C_p(X, Y) = 0$ sinon.

La suite de cochaines (C_p) $p = 1, \ldots, n-1$ engendre une déformation polynomiale d'ordre n, $\sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p C_p$, de G_U vers G.

3. Cas de l'algebre de Kac-Moody $\hat{G}$

On munit $\hat{G}$ de la base de Feigin ([**5**]) définie par (e_i) $i \in Z$ avec $[e_i, e_j] = \alpha_{ij}e_{i+j}$ et $\alpha_{ij} = j - i \bmod 3$.

Le Théorème 2 va résulter des calculs cohomologiques contenus dans les deux propositions ci-dessous:

Proposition 3. *Sous les hypothèses du Théorème 2, soit* D^+ *l'espace des dérivations de* $\hat{G}$ *du type:* $\left\{tp(t)\frac{d}{dt}\right.$ *avec* $\left.p(t) \in \mathbb{C}[t]\right\}$*, alors* $H^2(G_0,G_0) = \mathrm{Hom}(H,\mathrm{Der}\, \hat{N}^+) + \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^-),D^+) + \mathrm{Hom}(H,\mathrm{Der}\, \hat{N}^-) + H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$.

($H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$ a été déterminé par Feigin et Fialowski [**3**]).

La formule $C(e_0, X_i) = a_i(ade_0(X_i))$ pour $X_i \in \hat{N}^-$ définit un cocycle qui engendre une déformation formelle à l'ordre 1. Elle dépend d'une suite de paramètres $\Omega = (a_i)$ $i \in Z$.

La première étape de la déformation est tout à fait analogue à celle obtenue pour une algèbre semisimple de dimension finie.

Proposition 4. $H^2(G_\Omega, G_\Omega) = \mathrm{Hom}\left(H, \frac{\mathrm{Der}\,\hat{N}^+ + \mathrm{Der}\,\hat{N}^-}{\Delta}\right) \oplus V$ *où*

$$V = \{C \in \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-), H)/C(e_1, e_{-1}) \\ = ae_0,\ C(e_2, e_{-2}) = be_0\}$$

et

$$\Delta\{(ade_0, ade_o) \subset \mathrm{Der}\,\hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\,\hat{N}^-\}.$$

On obtient une suite de cochaines (C_p) $p \in N$ définies par: $C_p(X,Y) = [X,Y]$ si X est d'ordre p dans $\hat{N}^+$ (resp. $\hat{N}^-$) et Y d'ordre supérieur à p dans $\hat{N}^-$ (resp. $\hat{N}^+$) ($[\,,\,]$ est le crochet de $\hat{G}$) $C_p(X,Y) = 0$ sinon.

Un élément X de G_Ω est d'ordre p dans $\hat{N}^+$ (rsp. $\hat{N}^-$) s'il appartient à $\{e_{3_{p+1}}, e_{3_{p-1}}, e_{3_p}\}$ (resp. $\{e_{-3_{p+1}}, e_{-3_{p+1}}, e_{-3p}\}$).

Cette suite de cochaines engendre une déformation convergente de G_0 vers G, $C = \sum_{p=o}^{\infty} t^p C_p$.

[Je remercie Claude Roger pour ses conversations fructueuses.]

References

1. M. ADLER, On a trace functional for formal pseudo-differential operator and the symplectic structure of the $K-DV$ equation, *Inventiones Math.* **5** (1979), 219–248.
2. F. AMMAR, Cohomologies et déformations de certaines algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées, Thèse de doctorat, Metz (1990). A paraître aux publications du Département de Mathématiques de Lyon (1993)
3. B. FEIGIN, A. FIALOWSKI, Cohomology of the nilpotent subalgebras of current Lie algebras, *Studia Scientiarium Mathematicarum Hungarica* (1980).
4. G. LEGER, E. LUKS, Cohomology of nilradicals of Borel subalgebras, *Transactions of the American Mathematical Society* **195** (1974), 305–316.
5. A. LICHNEROWICZ, "*Déformations et quantifications,*" Springer Lectures Notes in Physics **106**, 1979, pp. 209–219.

6. M. SEMENOV-TIAN-CHANSKY, What is the classical R-matrix?, *Functional analysis and its applications* **17(4)** (1983), 17–35.

U.R.A. nº 399
I.S.G.M.P.
Université de Metz
F-57045 Metz Cedex
FRANCE

adresse actuelle:
Département de Mathématiques
Université de Sfax
TU-SFAX
Tunisie
FRACE

Rebut el 29 d'Abril de 1994