

SUR L'ORDRE DE LA DISTRIBUTION $1/f$

SEYDOU NOUROU DIALLO ET PATRICK SARGOS

Abstract

We construct a solution T_0 in the distribution sense of equation $fT = 1$ near a critical point of f and we give an upper bound for the order of T_0 in terms of f 's Newton Polyhedron, provided f is non degenerate in some sense. The order of T_0 is equal to this upper bound when f is non-negative.

1. Introduction

Soient Ω un voisinage ouvert de $\underline{0}$ dans \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle, vérifiant $f(\underline{0}) = 0$ et $f'(\underline{0}) = \underline{0}$. Nous nous intéressons à l'ordre des distributions T définies au voisinage de $\underline{0}$ qui sont solutions de l'équation:

$$(1.1) \quad fT = 1$$

(cf. [1]). Nous construisons à partir du polyèdre de Newton de f un entier $\mu(f) \geq 0$ qui vérifie les propriétés suivantes:

Théorème 1. *Si f est commode [3] et non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton [5], alors il existe un voisinage V de $\underline{0}$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$ solution de (1.1) et dont l'ordre est $\leq \max(1, \mu(f))$.*

Théorème 2. *Si f admet un minimum strict en $\underline{0}$, alors toute solution T de (1.1) dans Ω est d'ordre $\geq \mu(f)$.*

La méthode est celle de [2], et la démonstration revient à minimiser le nombre des intégrations par parties annoncées dans le Lemme 3.1 de [2].

Les définitions et la construction de $\mu(f)$ sont données au Section 2. La démonstration du Théorème 1 fait l'objet du Section 3, et celle du Théorème 2, plus facile, est exposée au Section 4.

2. Préliminaires

2.1. Notations.

Les lettres en caractères gras désignent des vecteurs:

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \underline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \underline{1} = (1, \dots, 1), \text{ etc...}$$

Les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n sont notés $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. La relation $\underline{k} \leq \underline{l}$ signifie $k_i \leq l_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Pour les dérivées partielles, on pose $\partial_j \phi(\underline{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\underline{x})$ et $\partial^{\underline{l}} \phi(\underline{x}) = \partial_1^{l_1} \dots \partial_n^{l_n} \phi(\underline{x}) = \frac{\partial^{|\underline{l}|} \phi}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}(\underline{x})$, avec $|\underline{l}| = l_1 + \dots + l_n$.

La notation: $f(x) \ll g(x) (x \in X)$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout $x \in X$.

Le produit scalaire dans \mathbb{R}^n est noté $\langle \underline{\lambda}, \underline{\alpha} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$.

Enfin, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω , et $f\mathcal{D}(\Omega)$ est l'idéal de $\mathcal{D}(\Omega)$ engendré par f .

Le symbole ■ à la fin d'un énoncé signifie que la démonstration ne présente pas de difficulté et a été omise.

2.2. Fonctions commodes, fonctions non dégénérées.

Etant donnée la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ analytique réelle admettant le développement en série entière: $f(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^\alpha$, on appelle polyèdre de Newton de f l'ensemble:

$$(2.1) \quad \xi(f) = \text{conv}(\{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n | a_{\underline{\alpha}} \neq 0\}) + \mathbb{R}_+^n$$

($\text{conv}(A) =$ enveloppe convexe de A , $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$).

Pour chaque facette τ de $\xi(f)$, le polynôme quasi-homogène associé à τ est:

$$(2.2) \quad f_\tau(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \tau \cap \mathbb{N}^n} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^\alpha.$$

Nous dirons que f est non dégénérée (par rapport à son polyèdre de Newton) si, pour chaque facette bornée τ de $\xi(f)$, f_τ ne s'annule pas en dehors des hyperplans de coordonnées.

Dans cet article, l'hypothèse " f non dégénérée" sera utilisée uniquement sous la forme de la propriété (3.10) du Lemme 3.3.

Nous dirons que f est commode si $\xi(f)$ possède un sommet sur chaque axe de coordonnée.

Lemme 2.1. *Si f est commode, alors $\xi(f)$ possède exactement n faces non bornées. Celles-ci sont contenues dans les hyperplans de coordonnées. ■*

C'est sous la forme du Lemme 2.1 que nous utiliserons l'hypothèse " f commode".

Notons que si f possède un minimum strict à l'origine, alors f est commode (pour plus de détails, voir [6]). C'est pourquoi dans toute la suite on supposera f commode.

2.3. Une construction géométrique de $\mu(f)$.

Soit F une face compacte de $\xi(f)$ (une telle face existe si f est commode et si $f(0) = 0$). Soit H l'hyperplan affine engendré par l'ensemble $F - \underline{1}$. Alors H coupe chacun des axes de coordonnées. Soit t_i l'abscisse du point d'intersection de H avec le $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées. On désigne par $\mu_i(F)$ l'entier immédiatement supérieur à t_i , autrement dit:

$$(2.3) \quad \mu_i(F) \text{ entier et } \mu_i(F) - 1 \leq t_i < \mu_i(F).$$

On pose alors, pour toute face F de $\xi(f)$:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \mu(F) = \max(0, \mu_1(F), \dots, \mu_n(F)) & \text{si } F \text{ est bornée} \\ \mu(F) = 0 & \text{si } F \text{ est non bornée.} \end{cases}$$

Soit enfin:

$$(2.5) \quad \mu(f) = \max \mu(F),$$

le maximum portant sur l'ensemble des faces de $\xi(f)$.

2.4. Une caractérisation de $\mu(F)$.

Soit F une face de $\xi(f)$. Nous appellerons covecteur associé à F le vecteur $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^n$, $\underline{\lambda} \neq \underline{0}$, orthogonal à F , tel que p.g.c.d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$. Si F est bornée, tous les λ_i sont non nuls.

Lemme 2.2. *Soient F une face bornée de $\xi(f)$, de covecteur $\underline{\lambda}$, et $\underline{\alpha}$ un sommet de F . Alors $\mu(F)$ est le plus petit entier K tel qu'on ait:*

$$(2.6) \quad \underline{l} \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\underline{l}| = K \implies \langle \underline{\lambda}, \underline{l} \rangle \geq \langle \underline{\lambda}, \underline{\alpha} - \underline{1} \rangle + 1. \quad \blacksquare$$

3. Démonstration du Théorème 1

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle commode non dégénérée. Nous allons construire un voisinage V de $\underline{0}$, une distribution T sur V , d'ordre $\leq \max(1, \mu(f))$, vérifiant (1.1), ou, ce qui revient au même, vérifiant:

$$(3.1) \quad T(\phi) = \int \frac{\phi(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} \text{ pour tout } \phi \in f\mathcal{D}(V).$$

La méthode de [2], utilisant un découpage et des partitions de l'unité, s'applique à notre problème en vertu du principe suivant:

Lemme 3.1. *Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille finie de mesures sur Ω telles que $\sum_i \sigma_i$ soit égal à la mesure de Lebesgue sur Ω .*

Considérons l'équation:

$$(3.2) \quad fT = \sigma_i.$$

Supposons que, pour chaque $i \in I$, il existe un voisinage V_i de $\underline{0}$ dans \mathbb{R}^n et $T_i \in \mathcal{D}'(V_i)$ solution de (3.2). Alors $T = \sum_i T_i$ est une solution de (1.1) dans $V = \bigcap_i V_i$. ■

3.1. Découpages.

Un découpage d'une partie mesurable A de \mathbb{R}^n est une partition finie de A , à des ensembles négligeables près (cf. [2, Section 2.1]).

a) Découpage de $[-1, 1]^n$.

Pour tout $\underline{\varepsilon} = (\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n)$, posons:

$$D_{\underline{\varepsilon}} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \varepsilon_i x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

La famille $(D_{\underline{\varepsilon}})_{\underline{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n}$ forme un découpage de $[-1, 1]^n$. Par le Lemme 3.1, nous sommes ramenés à résoudre, pour chaque $\underline{\varepsilon}$, l'équation:

$$(3.3) \quad T(\phi) = \int_{D_{\underline{\varepsilon}}} \frac{\phi(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} \text{ pour tout } \phi \in f\mathcal{D}(V).$$

Par symétrie, nous nous restreindrons au cas où $D_{\underline{\varepsilon}} = [0, 1]^n$.

b) **Découpage de $[0, 1]^n$ par polarité.**

Soit maintenant \mathcal{A} le découpage de $[0, 1]^n$ du corollaire 2.1 de [2]. Rappelons que chaque $S \in \mathcal{A}$ est de la forme:

$$(3.4) \quad S = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma),$$

où \mathcal{L} est l'application: $]0, 1]^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (-\log x_1, \dots, -\log x_n)$$

et où Γ est un cône n -dimensionnel de \mathbb{R}_+^n défini comme suit:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } n \text{ faces sécantes } F_1, \dots, F_n \text{ de } \xi(f), \text{ de covecteurs} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ telles que } \Gamma = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_+ \lambda_i. \end{array} \right.$$

Nous avons donc ramené la démonstration du Théorème 1 à celle du:

Lemme 3.2. *Soit S défini par (3.4) et (3.5) et supposons que f soit compatible avec S (cf. [2, Section 4]). Alors il existe un voisinage V de $\underline{0}$ et $T \in \mathcal{D}'(V)$, d'ordre $\leq \max(1, \mu(F_1), \dots, \mu(F_n))$, tels qu'on ait:*

$$(3.6) \quad T(\phi) = \int_S \frac{\phi(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} \text{ pour tout } \phi \in f\mathcal{D}(V).$$

Nous ne rappellerons pas la définition précise d'une fonction compatible avec S , car cela n'est pas nécessaire pour la suite. Néanmoins, pour des raisons de clarté, nous allons dire, en quelques mots et de façon imagée, ce dont il s'agit, en nous restreignant à la dimension deux.

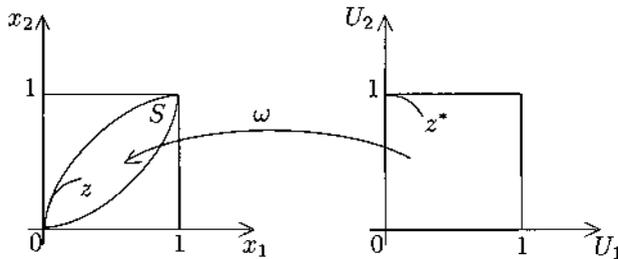


Figure 1

Supposons, comme dans la Figure 1 que l'ensemble Z des zéros de f contienne une courbe ayant un contact élevé avec l'un des bords de S . Alors le changement de variables ω , décrit au Section 3.2 ci-dessous, transforme cette courbe en une courbe Z^* tangente à la droite $U_2 = 1$. Ce phénomène de tangence fausse le mécanisme de notre démonstration (la propriété (3.10) ci-dessous n'est plus vérifiée).

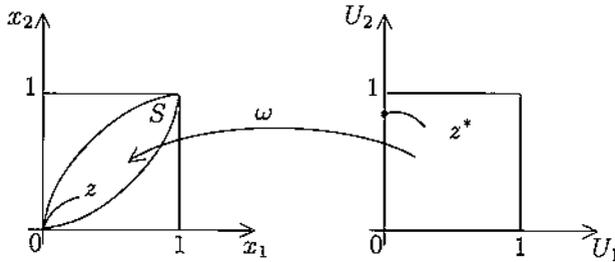


Figure 2

Supposons maintenant, comme dans la Figure 2, que l'ensemble Z soit en position générale par rapport au bord de S . Alors le phénomène de tangence n'apparaît plus et notre démonstration peut être appliquée.

Le but du Section 4 de [2] est de montrer, grâce au Lemme de Sard, que la non-compatibilité (cas de la Figure 1) est une situation exceptionnelle qui disparaît au moyen d'une homothétie sur les variables x_1, \dots, x_n . On peut donc toujours supposer que f est compatible avec S .

La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve du Lemme 3.2.

3.2. Le changement de variables ω associé à F_1, \dots, F_n .

On considère l'application:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \omega : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n \\ \omega \underline{u} = (u_1^{\lambda_{11}} u_2^{\lambda_{21}} \dots u_n^{\lambda_{n1}}, \dots, u_1^{\lambda_{1n}} u_2^{\lambda_{2n}} \dots u_n^{\lambda_{nn}}) \end{cases}$$

dont la restriction à $]0, 1[^n$ peut être définie par le diagramme:

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccc}]0, 1[^n & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{R}_+^n \\ \downarrow \omega & & p \downarrow \\ S & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \Gamma \end{array}$$

où p est l'application $\underline{t} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n t_i \lambda_i$.

Les propriétés de la fonction $f \circ \omega$, établies au Section 5.3 de [2], peuvent être résumées ainsi:

Lemme 3.3. *Soit $\underline{\alpha}$ le sommet commun aux faces F_1, \dots, F_n , et soit $\underline{m} = (\langle \lambda_1, \underline{\alpha} \rangle, \dots, \langle \lambda_n, \underline{\alpha} \rangle)$. Alors il existe une fonction analytique réelle f^* définie dans un voisinage W de $\omega^{-1}(\underline{0})$ telle qu'on ait les deux propriétés suivantes:*

$$(3.9) \quad f \circ \omega(\underline{u}) = u^{\underline{m}} f^*(\underline{u}) \text{ pour tout } \underline{u} \in W \cap [0, 1]^n$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} \text{Si } \underline{u}_0 \in \omega^{-1}(\underline{0}), \text{ l'un au moins des } n+1 \text{ nombres: } f^*(\underline{u}_0), \\ u_{01}(1-u_{01})\partial_1 f^*(\underline{u}_0), \dots, u_{0n}(1-u_{0n})\partial_n f^*(\underline{u}_0) \text{ est non nul. } \blacksquare \end{cases}$$

D'après (3.8), la formule du changement de variables appliquée à l'intégrale (3.6) s'écrit:

$$(3.11) \quad \int_S \frac{\phi(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} = \Delta \int_{[0,1]^n} \frac{\phi(\omega \underline{u})}{f^*(\underline{u})} \underline{u}^{-\underline{\nu}} d\underline{u},$$

où on a posé $\Delta = |\det(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|$ et

$$(3.12) \quad \nu_i = \langle \lambda_i, \underline{\alpha} - \underline{1} \rangle + 1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

3.3. Utilisation d'une partition de l'unité.

A l'aide de la formule (3.11) et d'une partition de l'unité, on peut ramener la démonstration du lemme 3.2 au résultat suivant:

Lemme 3.4. *Pour chaque $\underline{u}_0 \in \omega^{-1}(\underline{0})$, il existe un voisinage ouvert U de \underline{u}_0 , $U \subset W$, tel que, pour tout $\rho \in \mathcal{D}(U)$, la forme linéaire L , définie sur $f\mathcal{D}(\Omega)$ par:*

$$(3.13) \quad L(\phi) = \int_{[0,1]^n} \phi(\omega \underline{u}) \frac{\rho(\underline{u})}{f^*(\underline{u})} \underline{u}^{-\underline{\nu}} d\underline{u}$$

se prolonge en une distribution $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ d'ordre $\leq \max(1, \mu(F_1), \dots, \mu(F_n))$.

Le Lemme 3.2 se déduit du Lemme 3.4 comme suit:

Pour chaque $\underline{u} \in \omega^{-1}(\underline{0})$, soit U comme dans le Lemme 3.4. Extrayons de cet ensemble d'ouverts un recouvrement fini U_1, \dots, U_N de $\omega^{-1}(\underline{0})$ et

posons $W_1 = U_1 \cup \dots \cup U_N$. Choisissons un voisinage compact W_0 de $\omega^{-1}(0)$, $W_0 \subset W_1$. Construisons une famille ρ_1, \dots, ρ_n , $\rho_i \in \mathcal{D}(U_i)$ pour $i = 1, \dots, N$ telle que $\sum_i \rho_i \equiv 1$ sur W_0 . Notons $L_i(\phi)$ l'intégrale (3.13) correspondant à ρ_i . Par le Lemme 5.2 de [2], il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\omega^{-1}V \subset W_0$. Si $\phi \in f\mathcal{D}(V)$, on a $\int_S \frac{\phi(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} = \Delta \sum_{i=1}^N L_i(\phi)$, d'après (3.11). On conclut avec le Lemme 3.1.

Il nous reste à démontrer le Lemme 3.4. Nous étudions séparément les cas $f^*(\underline{u}_0) \neq 0$ et $f^*(\underline{u}_0) = 0$.

3.4. Démonstration du Lemme 3.4 lorsque $f^*(\underline{u}_0) \neq 0$.

a) Construction de U .

Soient I l'ensemble des indices i ($1 \leq i \leq n$) tels que $u_{0i} = 0$ et $\nu_i \neq 0$. On suppose, pour alléger les formules, que $I = \{1, \dots, r\}$ ($0 \leq r \leq n$).

Nous choisissons U assez petit pour que f^* ne s'annule pas dans U et tel que:

$$(3.14) \quad U \subset]-\infty, 1]^r \times \mathbb{R}^{n-r}.$$

Si $r = 0$ (i.e. si $I_1 = \emptyset$), alors la forme linéaire L définie par (3.13) est une mesure et il n'y a rien à démontrer (plus généralement, on peut dire que les variables u_{r+1}, \dots, u_n ne jouent aucun rôle). Nous supposons donc $r \geq 1$.

Nous allons montrer que L peut être prolongée en une distribution sur Ω d'ordre $\leq \max(\mu(F_1), \dots, \mu(F_r))$.

b) La formule d'intégration par parties.

Etablissons les conventions suivantes:

- θ désigne un élément de $\mathcal{D}(U)$, non nécessairement le même à chaque écriture.

- $B(t)$ désigne une fonction égale à $a + b \log t$ (a, b réels), non nécessairement la même à chaque écriture.

Par exemple, $\partial_j \theta(\underline{u})$ s'écrit encore $\theta(\underline{u})$, et $t^{-\gamma+1} B(t)$ est une primitive de $t^{-\gamma} B(t)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Avec ces notations, la formule d'intégration par parties par rapport à u_s ($1 \leq s \leq r$) admet l'écriture simplifiée suivante:

Lemme 3.5. Soient $\underline{l} \in \mathbb{N}^n$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $\phi \in f\mathcal{D}(\Omega)$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} \partial^l \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \left(\prod_{i=1}^r u_i^{-\nu_i + \langle \lambda_i, l \rangle + k_i} B_i(u_i) \right) d\underline{u} &= \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{[0,1]^n} \partial^{l+\varepsilon_j} \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \times \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^r u_i^{-\nu_i + \langle \lambda_i, l + \varepsilon_j \rangle + k_i} B_i(u_i) \right) d\underline{u} + \\ &\quad + \int_{[0,1]^n} \partial^l \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \left(\prod_{i=1}^r u_i^{-\nu_i + \langle \lambda_i, l \rangle + k_i + \delta_{i_s}} B_i(u_i) \right) d\underline{u} \end{aligned}$$

avec $\delta_{i_s} = 0$ si $i \neq s$ et $\delta_{s_s} = 1$.

L'intégration par parties est obtenue en prenant une primitive de $u_s \rightarrow u_s^{-\nu_s + \langle \lambda_s, l \rangle + k_s} B(u_s)$ et en dérivant la fonction $u_s \rightarrow \partial^l \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u})$. Les termes au bord sont nuls d'après (3.14) et d'après le résultat suivant :

Lemme 3.6. Soient $\phi \in f\mathcal{D}(\Omega)$ et $l \in \mathbb{N}^n$. Alors la fonction :

$$\underline{u} \longrightarrow \partial^l \phi(\omega \underline{u}) \left(\prod_{i=1}^n u_i^{-\nu_i + \langle \lambda_i, l \rangle} \right)$$

est bornée dans $[0, 1]^n$.

Démonstration du Lemme 3.6 :

Posons $\phi = f\psi$. Le calcul de $\partial^l(f\psi)$ par la formule de Leibnitz nous ramène à la majoration :

$$\partial^l f(\omega \underline{u}) \ll \prod_{i=1}^n u_i^{\nu_i - \langle \lambda_i, l \rangle} (\underline{u} \in [0, 1]^n).$$

Ecrivons $\partial^l f(\underline{x}) = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^n} C_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}$, et soit $\underline{\beta}$ tel que $C_{\underline{\beta}} \neq 0$, ce qui implique

$$\partial^{\underline{\beta} + l} f(\underline{0}) \neq 0.$$

On a $\underline{\beta} + l \in \xi(f)$, donc, pour chaque $i = 1, \dots, n$,

$$\langle \lambda_i, \underline{\beta} + l \rangle \geq \langle \lambda_i, \underline{\alpha} \rangle \geq \nu_i.$$

Alors, dans l'expression

$$\partial^l f(\omega \underline{u}) = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^n} C_{\underline{\beta}} \prod_{i=1}^n u_i^{\langle \lambda_i, \underline{\beta} \rangle},$$

on peut mettre en facteur le terme $(\prod_i u_i^{\nu_i - \langle \lambda_i, l \rangle})$ ce qui prouve le Lemme 3.6, et avec lui le Lemme 3.5. ■

c) Intégration par parties successives.

L'hypothèse $\nu_i > 0$ pour $i = 1, \dots, r$ implique, à l'aide du Lemme 2.1, que les faces F_1, \dots, F_r sont bornées. On peut donc caractériser $\mu(F_i)$ à l'aide du Lemme 2.2. Nous avons donc, pour $i = 1, \dots, r$ la relation:

$$(3.15) \quad \underline{l} \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\underline{l}| \geq \mu(F_i) \implies \langle \underline{\lambda}_i, \underline{l} \rangle \geq \nu_i.$$

Nous appliquons maintenant le Lemme 3.5; en intégrant par parties l'intégrale (3.13) par rapport à u_1 , nous obtenons:

$$\begin{aligned} L(\phi) = & \sum_{j=1}^n \int_{[0,1]^n} \partial_j \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \left(\prod_{i=1}^r u_i^{-\nu_i + \lambda_{ij}} \right) B(u_1) d\underline{u} + \\ & + \int_{[0,1]^n} \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \left(\prod_{i=2}^r u_i^{-\nu_i} \right) u_1^{-\nu_1 + 1} B(u_1) d\underline{u}. \end{aligned}$$

Nous allons à nouveau intégrer par parties par rapport à u_1 ceux des termes ci-dessus dont l'exposant de u_1 est < 0 , et nous laissons tels quels les autres termes. Au bout de cette deuxième opération, nous avons obtenu $L(\phi)$ sous la forme d'une somme d'au plus $(n+1)^2$ termes.

A nouveau, nous intégrons par parties par rapport à u_1 tous les termes dont l'exposant de u_1 est < 0 , sans modifier les autres, et ainsi de suite. Au bout de ν_1 opérations nous aurons montré que $L(\phi)$ est égal à la somme d'au plus $(n+1)^{\nu_1}$ termes de la forme:

$$(3.16) \quad \int_{[0,1]^n} \partial^{\underline{l}_1} \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) u_1^{-\nu_1 + \langle \underline{\lambda}_1, \underline{l}_1 \rangle + k_1} B(u_1) \left(\prod_{i=2}^r u_i^{-\nu_i + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{l}_i \rangle} \right) d\underline{u}$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}$, $\underline{l}_1 \in \mathbb{N}^n$, $k_1 \leq \nu_1$, $|\underline{l}_1| \leq \mu(F_1)$ et $\langle \underline{\lambda}_1, \underline{l}_1 \rangle + k_1 \geq \nu_1$ (l'inégalité $|\underline{l}_1| \leq \mu(F_1)$ provient de (3.15); la dernière inégalité est due au fait que l'exposant de u_1 augmente au moins de 1 à chaque opération jusqu'à ce qu'il soit ≥ 0).

On recommence maintenant le même procédé avec la variable u_2 : parmi tous les termes (3.16), on laisse tels quels ceux dont l'exposant de u_2 est ≥ 0 , et on intègre par parties par rapport à u_2 les autres, et ainsi de suite. Au bout de ν_2 opérations, nous aurons exprimé $L(\phi)$ comme somme d'au plus $(n+1)^{\nu_1 + \nu_2}$ termes de la forme:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{[0,1]^n} \partial^{\underline{l}_1 + \underline{l}_2} \phi(\omega \underline{u}) \theta(\underline{u}) \times u_1^{-\nu_1 + \langle \underline{\lambda}_1, \underline{l}_1 + \underline{l}_2 \rangle + k_1} B_1(u_1) \times \\ \times u_2^{-\nu_2 + \langle \underline{\lambda}_2, \underline{l}_1 + \underline{l}_2 \rangle + k_2} B_2(u_2) \left(\prod_{i=3}^r u_i^{-\nu_i + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{l}_1 + \underline{l}_2 \rangle} \right) d\underline{u} \end{array} \right.$$

avec: $k_1, k_2 \in \mathbb{N}; \underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathbb{N}^n; k_1 \leq \nu_1, k_2 \leq \nu_2; |\underline{l}_1| \leq \mu(F_1); \langle \underline{\lambda}_1, \underline{l}_1 \rangle + k_1 \geq \nu_1; \underline{l}_2 = \underline{0}$ ou bien $|\underline{l}_1 + \underline{l}_2| \leq \mu(F_2); \langle \underline{\lambda}_2, \underline{l}_1 + \underline{l}_2 \rangle + k_2 \geq \nu_2$.

En particulier, l'exposant de u_1 et l'exposant de u_2 sont ≥ 0 , et $|\underline{l}_1 + \underline{l}_2| \leq \max(\mu(F_1), \mu(F_2))$.

On recommence le procédé avec les variables u_3, \dots, u_r . On obtient finalement:

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\phi) = \sum_{k_1, \dots, k_r} \sum_{\underline{l}} \\ \int_{[0,1]^n} \partial^{\underline{l}} \phi(\omega(\underline{u})\theta(\underline{u})) \left(\prod_{i=1}^r u_i^{-\nu_i + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{l} \rangle + k_i} B_i(u_i) \right) d\underline{u}, \end{array} \right.$$

la sommation partant sur les $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ et les $\underline{l} \in \mathbb{N}^n$ tels que $k_i \leq \nu_i (i = 1, \dots, r)$, $|\underline{l}| \leq \max(\mu(F_1), \dots, \mu(F_r))$, et $\langle \underline{\lambda}_i, \underline{l} \rangle + k_i \geq \nu_i (i = 1, \dots, r)$.

L'expression (3.18) montre que L , définie initialement pour $\phi \in f\mathcal{D}(\Omega)$, se prolonge en une distribution sur \mathbb{R}^n d'ordre $\leq \max(\mu(F_1), \dots, \mu(F_r))$, ce qui est le résultat cherché.

3.5. Démonstration du Lemme 3.4 lorsque $f^*(\underline{u}_0) = 0$.

a) D'après (3.10), on peut supposer (par exemple) qu'on a:

$$0 < u_{01} < 1 \text{ et } \partial_1 f^*(\underline{u}_0) > 0.$$

Désignons par I l'ensemble des indices i tels que $u_{0i} = 0$ et $\nu_i \neq 0$; supposons pour simplifier que $I = \{2, 3, \dots, r\}$, avec $1 \leq r \leq n$.

Soit $U \subset W$ un voisinage de \underline{u}_0 assez petit pour qu'on ait:

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. U \subset]0, 1[\times]-\infty, 1[^{r-1} \times \mathbb{R}^{n-r} \\ 2. |f^*(\underline{u})| < 1 \text{ dans } U \\ 3. \partial_1 f^*(\underline{u}) > 0 \text{ dans } U. \end{array} \right.$$

On fixe $\rho \in \mathcal{D}(U)$ et on décompose l'intégrale (3.13):

$$L(\phi) = \int_{\substack{[0,1]^n \\ f^* \geq 0}} \phi(\omega \underline{u}) \frac{\rho(\underline{u})}{f^*(\underline{u})} \underline{u}^{-\nu} d\underline{u} + \int_{\substack{[0,1]^n \\ f^* \leq 0}} \phi(\omega \underline{u}) \frac{\rho(\underline{u})}{f^*(\underline{u})} \underline{u}^{-\nu} d\underline{u} = L_+(\phi) + L_-(\phi), \text{ disons.}$$

Nous allons montrer que la forme linéaire L_+ , initialement définie sur $f\mathcal{D}(\Omega)$, se prolonge en une distribution sur Ω d'ordre $\leq \max(1, \mu(F_2), \dots, \mu(F_r))$, ce qui, par symétrie, prouvera le même résultat pour L_- et donc pour L .

b) Pour $\underline{y} \in U$, on pose:

$$(3.20) \quad \underline{y} = F(\underline{u}) = (f^*(\underline{u}), u_2, \dots, u_n).$$

La condition (3.19.3) montre que F est une bijection (analytique, ainsi que son inverse) de U sur $F(U)$.

L'hypothèse $\partial_1 f^*(\underline{u}) > 0$ et la condition (3.19.2) impliquent:

$$(3.21) \quad F(U) \cap [0, 1]^n = F(U_+ \cap [0, 1]^n),$$

avec $U_+ = \{\underline{u} \in U \mid f^*(\underline{u}) \geq 0\}$.

Egalement, par (3.19.1) et (3.19.2), on a:

$$(3.22) \quad F(U) \subset]-\infty, 1]^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

qui est l'analogie de (3.14).

D'autre part, F^{-1} est de la forme: $F^{-1}(\underline{y}) = (h(\underline{y}), y_2, \dots, y_n)$, où h est analytique dans $F(U)$. Si on pose $\underline{\omega} = \omega \circ F^{-1}$, on a:

$$(3.23) \quad \underline{\omega y} = (h(\underline{y})^{\lambda_{11}} y_2^{\lambda_{21}} \dots y_n^{\lambda_{n1}}, \dots, h(\underline{y})^{\lambda_{1n}} y_2^{\lambda_{2n}} \dots y_n^{\lambda_{nn}}).$$

La formule du changement de variables associée à F s'écrit:

$$(3.24) \quad L_+(\phi) = \int_{[0,1]^n} \phi(\underline{\omega y}) \theta(\underline{y}) y_1^{-1} \left(\prod_{i=2}^r y_i^{-\nu_i} \right) d\underline{y},$$

avec $\theta \in \mathcal{D}(F(U))$.

c) Nous effectuons, dans (3.24), une intégration par parties par rapport à y_1 :

$$(3.25) \quad \begin{cases} L_+(\phi) = \sum_{j=1}^n \int_{[0,1]^n} \partial_j \phi(\underline{\omega y}) \theta(\underline{y}) \left(\prod_{i=2}^r y_i^{-\nu_i + (\lambda_i, \underline{e}_j)} \right) \times \\ \times \log y_1 d\underline{y} + \int_{[0,1]^n} \phi(\underline{\omega y}) \theta(\underline{y}) \left(\prod_{i=2}^r y_i^{-\nu_i} \right) \log y_1 d\underline{y}. \end{cases}$$

d) Nous nous trouvons maintenant dans une situation analogue à celle du Section 3.4 dans lequel nous remplaçons les variables u_1, \dots, u_r par y_2, \dots, y_r (la variable y_1 ne joue plus aucun rôle). Moyennant une adaptation évidente, le procédé des intégrations par parties successives peut être appliqué. On en déduit que $L_+(\phi)$ s'écrit comme somme d'au plus $(n+1)^{1+\nu_2+\dots+\nu_r}$ termes de la forme:

$$\int_{[0,1]^n} \partial^{\underline{l}} \phi(\omega \underline{y}) \theta(\underline{y}) \left(\prod_{i=1}^r y_i^{-\nu_i + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{l} \rangle + k_i} B_i(y_i) \right) \log y_1 d\underline{y},$$

avec $k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_i \leq \nu_i$ ($i = 2, \dots, r$); $\underline{l} \in \mathbb{N}^n$, $|\underline{l}| \leq \max(1, \mu(F_2), \dots, \mu(F_r))$; $\langle \underline{\lambda}_i, \underline{l} \rangle + k_i \geq \nu_i$ ($i = 2, \dots, r$).

Ce dernier point achève la démonstration du Théorème 1.

4. Démonstration du Théorème 2

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle admettant à l'origine un minimum strict. On suppose $\mu(f) > 0$. Le Théorème 2 est une conséquence immédiate du résultat suivant:

Lemme 4.1. *Il existe une suite de fonctions $\phi_m \in f\mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes:*

$$(4.1) \quad \phi_m \geq 0$$

$$(4.2) \quad \partial^{\underline{l}} \phi_m(\underline{x}) \ll 1 \quad (\underline{l} \in \mathbb{N}_n \text{ et } |\underline{l}| < \mu(f); m \in \mathbb{N}; \underline{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$(4.3) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \int \frac{\phi_m(\underline{x})}{f(\underline{x})} = +\infty.$$

Démonstration du Lemme 4.1:

Soit F une face de $\xi(f)$ telle que $\mu(F) = \mu(f)$. Comme on a supposé $\mu(f) > 0$, F est compacte, et il existe j ($1 \leq j \leq n$) tel que $\mu_j(F) = \mu(F)$.

Soit $N = \mu(f) - 1$. Posons:

$$\rho_m(t) = \begin{cases} t^N e^{-1/mt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}, \text{ et}$$

$$(4.4) \quad \phi_m(\underline{x}) = \rho_m(x_j) \chi(\underline{x}),$$

avec $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\chi(\underline{x}) \equiv 1$ au voisinage de $\underline{0}$, $0 \leq \chi \leq 1$. Montrons que la suite (ϕ_m) répond à la question.

La vérification de (4.1) et (4.2) ne pose pas de problème. Pour voir que ϕ_m est dans $f\mathcal{D}(\Omega)$, on peut utiliser l'inégalité de Lojasiewicz ([4, Section 17]) qui montre que $\frac{1}{f}$ est à croissance modérée au voisinage de $\underline{0}$, alors que ϕ_m est à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées. Il nous reste à établir (4.3).

Soient $\underline{\lambda}$ le covecteur associé à F , et $\underline{\alpha}$ un sommet de F . Choisissons des faces F_2, \dots, F_n de $\xi(f)$, de covecteurs $\underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_n$, contenant $\underline{\alpha}$, telles que le cône $\Gamma = \mathbb{R}_+ \underline{\lambda} + \sum_{i=2}^n \mathbb{R}_+ \lambda_i$ soit d'intérieur non vide. Posons $\nu = \langle \underline{\lambda}, \underline{\alpha} - \underline{1} \rangle + 1$, $\nu_i = \langle \lambda_i, \underline{\alpha} - \underline{1} \rangle + 1$ pour $i = 2, \dots, n$. A l'aide du changement de variables ω (cf. Section 3.2), on obtient:

$$\begin{aligned} \int \frac{\phi_m(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} &\geq \int_{\mathcal{L}^{-1}(\Gamma)} \frac{\phi_m(\underline{x})}{f(\underline{x})} d\underline{x} = \\ &= \Delta \int_{[0,1]^n} \frac{\phi_m(\omega \underline{u})}{f^*(\underline{u})} u_1^{-\nu} \left(\prod_{i=2}^n u_i^{-\nu_i} \right) d\underline{u} \gg \\ &\gg \int_{[0,1]^n} \phi_m(\omega \underline{u}) u_1^{-\nu} d\underline{u} \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

En posant $t = (u_2^{\lambda_{2j}} \dots u_n^{\lambda_{nj}}) \times u_1^{\lambda_j}$, et à l'aide d'inégalités faciles, on voit que cette dernière intégrale est

$$\gg \int_0^1 e^{-1/mt} t^{N-(\nu-1)/\lambda_j} \frac{dt}{t}.$$

Mais, d'après (2.3), l'exposant $N - (\nu - 1)/\lambda_j$ est ≤ 0 , ce qui prouve (4.3), et le Lemme 4.1 est démontré.

Références

1. M. F. ATIYAH, Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 145-150.
2. J. DENEFF ET P. SARGOS, Polyèdre de Newton et distribution $f_+^s \cdot I$, *Journal d'Analyse Mathématique* **53** (1989), 201-218.
3. A. G. KOUCHNIRENKO, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Inventiones Math.* **32** (1976), 1-31.
4. S. LOJASIEWICZ, Sur le problème de division, *Studia Math.* **18** (1959), 87-136.
5. A. N. VARCHENKO, Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, *Funkts. Analiz.* **10**, no. **3** (1976), 13-38.

6. V. A. VASILIEV, Asymptotic behaviour of exponential integrals, Newton's diagram and the classification of minimal points, *Funkts. Analiz.* **13**, no. 4 (1979), 1–12.

Departement de Mathematiques
Faculte des Sciences
Universite Cheikh Anta Diop de Dakar
Dakar
SENEGAL

Primera versió rebuda el 19 de Desembre de 1990,
darrera versió rebuda el 19 de Maig de 1992