Publl. Mat. **49** (2005), 93–110

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ DANS L'ANNEAU DES SÉRIES DE DIRICHLET ANALYTIQUES

Frédéric Bayart et Augustin Mouze

Abstract

We discuss some local analytic properties of the ring of Dirichlet series. We obtain mainly the equivalence between the irreducibility in the analytic ring and in the formal one. In the same way we prove that the ring of analytic Dirichlet series is integrally closed in the ring of formal Dirichlet series. Finally we introduce the notion of standard basis in these rings and we give a finitely generated ideal which does not admit standard bases.

1. Introduction

Ce travail est la suite d'une étude analytique locale de l'anneau des séries de Dirichlet, entamée dans [**2**] et [**3**]. On rappelle qu'une série de Dirichlet (formelle) est une série de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite complexe et s un complexe. Lorsqu'il existe un $s\in\mathbb{C}$ tel que la série converge, on dit que la série de Dirichlet est analytique. Par des résultats classiques, ceci est équivalent au fait que *l'abscisse de convergence de* f, définie par la formule

$$\sigma_c(f)=\inf\left\{\sigma\in\mathbb{R}\,;\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma}\text{ converge}\right\},$$

est différente de $+\infty$. Le produit de deux séries de Dirichlet est défini par

$$\left(\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}\right)=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{ij=n} a_i b_j\right) n^{-s}.$$

En particulier, l'ensemble des séries de Dirichlet formelles $\mathcal{D}[[s]]$ ou analytiques $\mathcal{D}\{s\}$ est muni d'une structure d'anneau. Il est facile de vérifier que ces anneaux sont locaux, d'idéal maximal l'ensemble de leurs éléments

2000 *Mathematics Subject Classification.* 13F15, 30B50, 32B05.
Key words. Dirichlet series, local analytic geometry, arithmetic rings.

non inversibles (i.e. l'ensemble des séries $f(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ telles que l'on ait $a_1=0$).

Par la transformation de Bohr, il est aussi possible de voir les séries de Dirichlet comme des séries de Taylor en une infinité de variables dont les monômes du développement ne comportent qu'un nombre fini de variables. En notant $(p_j)_{j\geq 1}$ la suite des nombres premiers, on peut associer à la série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n p_1^{-s\alpha_1}\dots p_r^{-s\alpha_r}$ la série de Taylor $\tilde{f}(X)=\sum_{n\geq 1} a_n X_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r}$, où on a décomposé chaque n en $p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$. L'étude des anneaux $\mathcal{D}[[s]]$ et $\mathcal{D}\{s\}$ est donc à rapprocher de celle de $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_l]]$, l'anneau des séries formelles en l variables, et de $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$, l'anneau des séries convergentes. Il est très facile de constater que, contrairement au cas classique, $\mathcal{D}\{s\}$ n'est pas noethérien : si I_n est l'idéal engendré par $(2^{-s},3^{-s},\dots,p_n^{-s})$, la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'idéaux. La non-noethérianité et l'impossibilité d'effectuer des récurrences sur le nombre de variables sont des obstacles majeurs pour adapter les preuves des propriétés de géométrie analytique locale de $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$ à $\mathcal{D}\{s\}$. Cependant, il est prouvé dans [**2**] que $\mathcal{D}\{s\}$ est factoriel.

Un des outils essentiels pour prouver la factorialité de $\mathcal{D}\{s\}$ est un théorème de division par plusieurs séries de type Weierstrass [**2**]. Fixons $\preceq$ un ordre sur $\mathbb{N}^*$, compatible avec les valuations p-adiques (c'est-à-dire que si $\alpha_1\leq\beta_1,\dots,\alpha_r\leq\beta_r$ alors $p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}\preceq p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}$) et tel que toute partie non vide de $\mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément. Si $f_1,\dots,f_m$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{D}\{s\}$, et si q_i est minimum dans le support de f_i pour $\preceq$, alors pour tout $f\in\mathcal{D}\{s\}$ non nul, il existe des uniques séries de Dirichlet $g_1,\dots,g_m$ et h telles que $f=\sum_{i=1}^m f_i g_i+h$, le support de g_i est inclus dans Δ_i, où $\Delta_1=\{n\in\mathbb{N}^*\,;\,q_1\mid n\}$, $\Delta_i=\{n\in\mathbb{N}^*\,;\,q_i\mid n\}-(\Delta_1\cup\dots\cup\Delta_{i-1})$, et le support de h est inclus dans $\mathbb{N}^*-(\Delta_1\cup\dots\cup\Delta_m)$. On rappelle que le support d'une série de Dirichlet $f=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ est défini par

$$\mathrm{Supp}(f)=\{n\in\mathbb{N}^*\,;\,a_n\neq 0\}\,.$$

Dans ce travail on prouve, dans un premier temps, que, pour un élément de $\mathcal{D}\{s\}$, l'irréductibilité analytique équivaut à l'irréductibilité formelle. On répond ainsi à une question posée par J.-P. Kahane aux auteurs. On utilise pour cela les propriétés de divisions des séries de Dirichlet vues comme séries en une infinité de variables et aussi les propriétés de ces séries vues comme fonctions d'une variable complexe. En utilisant le même type de raisonnement, on obtient aussi que l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos sur $\mathcal{D}[[s]]$. Comme conséquence, on a donc que si f est un élément de $\mathcal{D}[[s]]$ et f^m ($m \in \mathbb{N}^*$) un élément de $\mathcal{D}\{s\}$, alors f est en fait analytique. Ces résultats sont bien entendus les analogues des résultats classiques dans les anneaux $\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_l\}$ et $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_l]]$ (voir par exemple [**9**]).

Enfin, on s'intéresse dans $\mathcal{D}\{s\}$ au problème de la division par un idéal : étant donné un idéal finiment engendré I, existe-t-il un ordre $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ et des générateurs $f_1, \ldots, f_m$ de I tels que, pour tout f de $\mathcal{D}\{s\}$, f appartient à l'idéal si et seulement si son reste dans la division par $f_1, \ldots, f_m$ est nul ? Ce problème est relié à l'existence d'une base standard pour l'idéal. En général, l'existence d'une telle base se prouve en théorie par la noethérianité de l'anneau sous-jacent, et se construit, en pratique, par l'algorithme de Buchberger (voir par exemple [**7**]). Dans la Partie 3, on introduit la notion de bases standards pour les idéaux de $\mathcal{D}\{s\}$. On exhibe alors un idéal finiment engendré de $\mathcal{D}\{s\}$ pour lequel, en utilisant le théorème de division analytique (mentionné cidessus) de [**3**], on prouve que l'algorithme de Buchberger ne termine pas. On en déduit la non-existence d'une base standard pour cet idéal.

L'absence de bases de Gröbner dans certains anneaux à division a été observée pour la première fois dans [**8**]. Dans cet article, l'auteur considère l'espace vectoriel R_n des séries (formelles) en une infinité de variables qui sont homogènes de degré $n \in \mathbb{N}$, et R' la plus petite algèbre contenue dans $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_k, \ldots]]$ contenant tous les R_n. L'exemple donné est celui d'un idéal engendré par une forme quadratique et une forme cubique. Il est très proche de celui que l'on propose dans la Partie 3. Dans ce travail, une difficulté supplémentaire est due au fait que l'on doit assurer la convergence des séries à chaque étape de la démonstration. D'autre part, la preuve de l'absence de bases standards dans [**8**] n'est pas entièrement explicitée. Ici, dans le cadre considéré, on pense qu'une présentation complète a son intérêt.

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses remarques et ses références qui ont grandement contribué à améliorer la présentation de l'article et la rédaction des preuves.

2. Irréductibilité et clôture intégrale

2.1. Définitions et notations.

Dans cette partie, on adopte les notations suivantes :

- Pour $l \geq 1$, $\mathcal{D}_l[[s]]$ (resp. $\mathcal{D}_l\{s\}$) désigne le sous-anneau de $\mathcal{D}[[s]]$ (resp. $\mathcal{D}\{s\}$) des séries de Dirichlet f vérifiant $\mathrm{Supp}(f) \subset \{p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}\,;\ \alpha_i \geq 0\}$.

- P_l est la projection canonique de $\mathcal{D}\{s\}$ sur $\mathcal{D}_l\{s\}$

$$P_l\left(\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}\right) = \sum_{J\in\mathbb{N}^l} a_{p_1^{j_1}\dots p_l^{j_l}}\left(p_1^{j_1}\dots p_l^{j_l}\right)^{-s}.$$

On identifie ainsi par la transformation de Bohr $\mathcal{D}_l\{s\}$ et $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$. En effet, à toute série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{J\in\mathbb{N}^l} a_J\left(p_1^{j_1}\dots p_l^{j_l}\right)^{-s}$$

de $\mathcal{D}_l\{s\}$, d'abscisse de convergence σ, on associe la série

$$\tilde{f}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^l} a_J X_1^{j_1}\dots X_l^{j_l},$$

qui converge dans le domaine $D = \{(X_1,\dots,X_l)\,;\,|X_i| < p_i^{-\sigma}\}$. Les anneaux $\mathcal{D}_l\{s\}$ et $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$ sont donc isomorphes.

De plus, si f est un élément de $\mathcal{D}\{s\}$, il existe clairement $r\in\mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait

$$||f||_r = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^r} < +\infty.$$

On vérifie aisément que $||.||_r$ est une norme sur l'espace

$$\mathcal{D}(r) = \{f\in\mathcal{D}[[s]]\,;\,||f||_r < +\infty\},$$

qui en fait une algèbre de Banach. Enfin, soit p un nombre premier.

Définition 2.1 ([**2**])**.** On dit que $P\in\mathcal{D}\{s\}$ est un *polynôme distingué* en p de degré α si P s'écrit

$$P(s) = \left(\frac{1}{p^s}\right)^\alpha + \sum_{j=0}^{\alpha-1} r_j(s)(p^{-s})^j,$$

avec, pour tout $j = 0,\dots,\alpha-1$,
- $r_j\in\mathcal{D}\{s\}$,
- r_j non inversible,
- $n\in\mathrm{Supp}(r_j)$ implique n premier avec p.

On note aussi, dans la suite,

$$A_p = \{f\in\mathcal{D}\{s\}\,;\,\forall\, n\in\mathrm{Supp}\, f, n \text{ est premier avec } p\}.$$

Clairement l'anneau A_p, comme $\mathcal{D}\{s\}$, est un anneau factoriel (voir [**2**] et [**3**]).

2.2. Irréductibilité formelle et analytique.

On commence par l'énoncé de quelques lemmes classiques.

Lemme 2.2. *Soit $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ et z une racine de P. Alors on a*

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Preuve: Si $|z| > \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$, on a

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^n - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z_i\right| \\ &\geq |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^{n-1} \\ &> 0, \end{aligned}$$

et z ne peut être racine de P. □

Lemme 2.3. *Soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ un élément de $\mathcal{D}\{s\}$ qui se prolonge en une fonction holomorphe, bornée par une constante C, sur l'ensemble $\{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re(s) \geq \sigma\}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a l'estimation*

$$|a_n| \leq Cn^{\sigma}.$$

Preuve: D'après un résultat de Bohr [**4**], la série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge uniformément dans tout demi-plan $\{s\in\mathbb{C}\,;\, \Re(s) \geq \sigma + \varepsilon\}$, avec $\varepsilon > 0$. En interprétant les coefficients de la série de Dirichlet comme des coefficients de Fourier, on tire

$$a_n n^{-\sigma-\varepsilon} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\sigma + \varepsilon + it)n^{it}\, dt.$$

Ceci donne le résultat. □

Lemme 2.4. *Soit $f(s) = (p^{-s})^{\alpha} + r_{\alpha-1}(s)\,(p^{-s})^{\alpha-1} + \cdots + r_0(s)$ un polynôme distingué en p de $\mathcal{D}\{s\}$. On pose*

$$f(s,T) = T^{\alpha} + r_{\alpha-1}(s)T^{\alpha-1} + \cdots + r_0(s).$$

Alors $f(s)$ est irréductible dans $\mathcal{D}\{s\}$ si et seulement si $f(s,T)$ est irréductible dans $A_p[T]$.

Preuve: Il est évident qu'une factorisation de $f(s,T)$ dans $A_p[T]$ donne une factorisation de $f(s)$ dans $\mathcal{D}\{s\}$. Réciproquement, si $f = f_1 \dots f_r$ est une factorisation de f, chaque f_i étant non inversible, il est clair qu'il existe dans le support de f_i un terme en p^β. Le théorème de préparation de Weierstrass [**2**] donne $f_i = U_i P_i$, où U_i est inversible et P_i est un polynôme distingué en p. On en déduit une factorisation de $f(s,T)$. □

Théorème 2.5. *Soit $f \in \mathcal{D}\{s\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est irréductible dans $\mathcal{D}\{s\}$*

(ii) *f est irréductible dans $\mathcal{D}[[s]]$.*

Preuve: L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente. Réciproquement, soit f un élément irréductible de $\mathcal{D}\{s\}$. Il suffit de considérer le cas où f est un polynôme distingué

$$f(s) = \left(p^{-s}\right)^\alpha + r_{\alpha-1}(s)\left(p^{-s}\right)^{\alpha-1} + \dots + r_0(s),$$

où $r_i \in A_p$. Le cas général s'en déduit en utilisant le théorème de préparation de Weierstrass, comme dans [**2**]. On introduit alors, comme dans le Lemme 2.4, le polynôme

$$f(s,T) = T^\alpha + r_{\alpha-1}(s)T^{\alpha-1} + \dots + r_0(s).$$

On note encore, pour tout $l \geq 1$ et pour tout indice k, $0 \leq k \leq \alpha - 1$,

- $r_k^{(l)} = P_l(r_k)$.
- $f^{(l)} = P_l(f)$.
- $f^{(l)}(s,T) = T^\alpha + r_{\alpha-1}^{(l)}(s)T^{\alpha-1} + \dots + r_0^{(l)}(s)$.

Lemme-clé 2.6. *Il existe $l_0 \geq 1$ tel que, pour tout $l \geq l_0$, $f^{(l)}$ est irréductible dans $\mathcal{D}_l\{s\}$.*

On déduit aisément le Théorème 2.5 du lemme-clé. En effet, si f n'est pas irréductible dans $\mathcal{D}[[s]]$, pour tout l assez grand, $f^{(l)}$ n'est pas irréductible dans $\mathcal{D}_l[[s]]$ (la factorisation non triviale dans $\mathcal{D}[[s]]$ se projette), alors qu'il l'est dans $\mathcal{D}_l\{s\}$. Mais les anneaux $\mathcal{D}_l[[s]]$ et $\mathcal{D}_l\{s\}$ sont, par la transformation de Bohr, isomorphes respectivement à $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_l]]$ et $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$. Or, il est bien connu [**9**] que l'irréductibilité dans $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$ équivaut à l'irréductibilité dans $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_l]]$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f.

Preuve du Lemme-clé 2.6: Le nombre de facteurs irréductibles dans la décomposition de $f^{(l)}(s,T)$ décroît en fonction de l : il existe donc des entiers r et m tels que, si on a $l \geq m$, on ait la décomposition

$$f^{(l)}(s,T) = f_1^{(l)}(s,T) \dots f_r^{(l)}(s,T),$$

où $f_k^{(l)}(s,T)$ est irréductible dans $A_p[T]$ et s'écrit

$$f_k^{(l)}(s,T) = T^{\alpha_k} + b_{k,\alpha_k-1}^{(l)}(s) T^{\alpha_k-1} + \dots + b_{k,0}^{(l)}(s).$$

Quitte à réordonner les $f_k^{(l)}$, on peut supposer

$$P_l\left(b_{k,j}^{(l+1)}\right) = b_{k,j}^{(l)}. \tag{1}$$

On écrit $b_{k,j}(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \widehat{b_{k,j}^{(l)}}(n) n^{-s}$. La relation (1) entraîne que, si les entiers k, j et n sont fixés, la suite $\left(\widehat{b_{k,j}^{(l)}}(n)\right)_{l \geq m}$ est stationnaire. On note

$$\widehat{b_{k,j}}(n) = \lim_{l \to +\infty} \widehat{b_{k,j}^{(l)}}(n),$$

$$b_{k,j}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{b_{k,j}}(n) n^{-s}$$

et

$$f_k(s,T) = T^{\alpha_k} + b_{k,\alpha_k-1}(s) T^{\alpha_k-1} + \dots + b_{k,0}(s).$$

On a donc la factorisation formelle

$$f = f_1 \dots f_r. \tag{2}$$

On fixe des réels σ_1 et C_1 tels que, pour $k = 0, \dots, \alpha - 1$, on ait l'estimation

$$\|r_k\|_{\sigma_1} \leq C_1.$$

En particulier, pour chaque $l \geq 1$, on a aussi

$$\|r_k^{(l)}\|_{\sigma_1} \leq C_1.$$

On fixe $s \in \mathbb{C}$, avec $\Re(s) \geq \sigma_1$, et, pour chaque $l \geq 1$, on factorise le polynôme $f^{(l)}(s,T)$ dans $\mathbb{C}[T]$

$$f^{(l)}(s,T) = \left(T - \phi_1^{(l)}(s)\right) \dots \left(T - \phi_\alpha^{(l)}(s)\right).$$

Le Lemme 2.2 implique, pour tout complexe s, avec $\Re(s) \geq \sigma_1$, pour tout entier $u \leq \alpha$, l'inégalité

$$|\phi_u^{(l)}(s)| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{\alpha-1} \left|r_k^{(l)}(s)\right|\right) \leq C_2,$$

où C_2 est une constante indépendante de l et de s. D'autre part, si on note $F(s)$ (resp. $F^{(l)}(s)$) le discriminant du polynôme $f(s,T)$ (resp. $f^{(l)}(s,T)$), alors F et $F^{(l)}$ sont des séries de Dirichlet analytiques et on a aussi $F^{(l)} = P_l(F)$. En outre, F ne peut pas être la série de Dirichlet identiquement nulle. En effet, F est aussi le discriminant de $f(s,T)$, vu comme un polynôme de $K_p[T]$ (où K_p est le corps des fractions de A_p). Comme $f(s,T)$ est un polynôme unitaire irréductible dans $A_p[T]$, et comme A_p est intégralement clos [**3**], $f(s,T)$ est aussi irréductible dans $K_p[T]$ et son discriminant F est non nul.

En particulier, on peut écrire

$$F(s) = a_k k^{-s} + \sum_{n>k} a_n n^{-s}, \text{ avec } a_k \neq 0.$$

Puisque l'on a $F \in \mathcal{D}\{s\}$, on peut trouver $\sigma_2 > \sigma_1$ tel que

$$\sum_{n>k} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_2}} < \frac{|a_k|}{k^{\sigma_2}}.$$

Alors, si on suppose $\sigma \geq \sigma_2$, on a

$$\sum_{n>k} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}} \leq \frac{1}{k^{\sigma-\sigma_2}} \sum_{n>k} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_2}} < \frac{|a_k|}{k^{\sigma}}.$$

Ceci entraîne en particulier $F^{(l)}(s) \neq 0$ si $\Re(s) > \sigma_2$ et l assez grand. Les racines de $f^{(l)}(s,T)$ sont donc simples. Comme les coefficients de $f^{(l)}(s,T)$ dépendent holomorphiquement de s, un résultat classique (voir [**5**] par exemple) implique que les fonctions racines $\phi_u^{(l)}(s)$ sont holomorphes dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re(s) > \sigma_2\}$.

On factorise maintenant, pour les valeurs de s où c'est possible, les polynômes

$$f_k^{(l)}(s,T) = \left(T - \psi_{k,1}^{(l)}(s)\right) \dots \left(T - \psi_{k,\alpha_k}^{(l)}(s)\right).$$

Par unicité de la factorisation de $f^{(l)}(s,T)$ dans $\mathbb{C}[T]$, dès que $\Re(s)$ est assez grand, pour chaque k, j, il existe un u avec $\psi_{k,j}^{(l)}(s) = \phi_u^{(l)}(s)$. Redéveloppant les $f_k(s,T)$, on en déduit qu'il existe une constante C_3 (toujours indépendante de l) de sorte que chaque série de Dirichlet $b_{k,j}^{(l)}$ puisse être prolongée en une fonction holomorphe bornée par C_3 sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re(s) > \sigma_2\}$. En particulier, on obtient par le Lemme 2.3

$$\left|\widehat{b^{(l)}_{k,j}}(n)\right| \leq C_3 n^{\sigma_2},$$

ou encore, en passant à la limite,

$$\left|\widehat{b_{k,j}}(n)\right| \leq C_3 n^{\sigma_2}.$$

Mais ceci signifie que les séries de Dirichlet f_k sont analytiques et la factorisation (2) a en fait lieu dans $\mathcal{D}\{s\}$. Ainsi, $r = 1$ et le lemme-clé est prouvé. $\square$

2.3. Clôture intégrale.

Le même type de raisonnement qu'au Paragraphe 2.2 conduit au résultat suivant.

Théorème 2.7. *Soient $A(s,T)$ un polynôme unitaire de $\mathcal{D}\{s\}[T]$ et $f \in \mathcal{D}[[s]]$ une racine de A. Alors $f \in \mathcal{D}\{s\}$.*

Autrement dit,

$\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos sur $\mathcal{D}[[s]]$.

Preuve: On peut toujours supposer que A est irréductible. Ainsi, comme dans la preuve du théorème précédent, il existe des constantes σ et C telles que, pour l assez grand, le polynôme $A^{(l)}(s,T) = P_l(A(s,T))$ se factorise de la manière suivante

$$A^{(l)}(s,T) = \left(T - \phi^{(l)}_1(s)\right) \dots \left(T - \phi^{(l)}_\alpha(s)\right),$$

où les $\phi^{(l)}_k$ sont des fonctions holomorphes sur $\{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re(s) > \sigma\}$ et bornées par C. En outre, $f^{(l)} = P_l(f)$ est racine de $A^{(l)}(s,T)$. En utilisant l'isomorphie de $\mathcal{D}_l\{s\}$ et de $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_l\}$ et en utilisant le théorème classique d'Artin (voir [**1**] ou [**6**] pour une preuve facile d'une version faible qui est exactement celle dont a besoin ici), on en déduit que $f^{(l)}$ appartient à $\mathcal{D}\{s\}$. En outre, puisque $f^{(l)}(s)$ est égal à l'un des $\phi^{(l)}_u(s)$ pour s assez grand, chaque $f^{(l)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re(s) > \sigma\}$, et bornée par C. De la même façon que dans la preuve du Théorème 2.5, on en déduit $f \in \mathcal{D}\{s\}$. $\square$

On déduit, par exemple, du Théorème 2.7 le résultat suivant.

Corollaire 2.8. *Soient $f \in \mathcal{D}[[s]]$ et m un entier non nul. Si f^m appartient à $\mathcal{D}\{s\}$, alors on a $f \in \mathcal{D}\{s\}$.*

Preuve: Si $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ est inversible, le résultat est une simple conséquence de [**3**]. En effet, on peut dans ce cas supposer $a_1 = 1$ et $f^m(s) = 1 + \sum_{n\geq 2} b_n n^{-s}$. On en déduit que $f(s)$ est simplement la composée de la série convergente $(1+t)^{1/m}$ avec la série de Dirichlet analytique $\sum_{n\geq 2} b_n n^{-s}$, qui donne une série encore convergente (voir [**3**, Proposition 5.6]). Le cas général est en fait une conséquence directe du Théorème 2.7, appliqué au monôme X^m. $\square$

Remarque. Dans le cas classique des séries de Taylor, les Théorèmes 2.5 et 2.7 peuvent être vus comme des conséquences du théorème d'approximation d'Artin [**1**] (on pourra consulter [**9**] sur le sujet). Une question naturelle est alors : le théorème d'approximation d'Artin est-il encore valable dans l'anneau des séries de Dirichlet ?

3. Division par un idéal

3.1. Non-terminaison d'un algorithme.

Dans cette section, on considère $\mathbb{N}^{(\infty)}$ l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots)$ de $\mathbb{N}^\infty$, qui ont un nombre fini de composantes non nulles. La longueur d'un multi-indice α est alors définie par

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j.$$

On note aussi e_i l'élément de $\mathbb{N}^{(\infty)}$ qui a toutes ses composantes nulles sauf la i-ième qui est égale à 1. $\mathbb{N}^{(\infty)}$ s'identifie à $\mathbb{N}^*$ par la bijection

$$\psi(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots).$$

En outre, tout ordre $\preceq$ sur $\mathbb{N}^{(\infty)}$ définit aussi un ordre $\preceq$ sur $\mathbb{N}^*$, en posant, pour a et b entiers non nuls,

$$a \preceq b \iff \psi(a) \preceq \psi(b).$$

Par extension, le support d'une série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ pourra être vu comme une partie de $\mathbb{N}^{(\infty)}$

$$\mathrm{Supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^{(\infty)} \,;\, a_\alpha \neq 0\},$$

où $a_\alpha = a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$. Si $\preceq$ est un ordre sur $\mathbb{N}^{(\infty)}$ et si $\delta = \min_{\preceq} \{\alpha \in \mathbb{N}^{(\infty)} \,;\, \alpha \in \mathrm{Supp}\, f\}$, on appelle premier terme de f le monôme

$$FT_{\preceq}(f) = p_1^{-\delta_1 s} \dots p_r^{-\delta_r s}.$$

Pour ce paragraphe seulement, on munit $\mathbb{N}^{(\infty)}$ de l'ordre $\preceq$ suivant : pour α et β dans $\mathbb{N}^{(\infty)}$,

$$\alpha \preceq \beta \text{ si et seulement si } \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \text{ou} \\ |\alpha| = |\beta| & \text{et la première composante non} \\ & \text{nulle de } \alpha - \beta \text{ est positive.} \end{cases}$$

Sauf mention explicite du contraire, dans ce paragraphe, l'ordre considéré sur $\mathbb{N}^{(\infty)}$ sera toujours celui donné par $\preceq$.

On définit aussi, pour tout $j \geq 1$, deux ensembles de multi-indices :

- Λ_j est l'ensemble des multi-indices α de $\mathbb{N}^{(\infty)}$, de longueur $j+1$, de première composante α_1 nulle, tel qu'il existe un i pour lequel $\alpha_i \geq 2$, et s'il existe i avec $\alpha_i = 2$ ou 3, alors il existe $k \neq i$ avec $\alpha_k \geq 2$.
- Γ_j est l'ensemble des multi-indices β de $\mathbb{N}^{(\infty)}$, de longueur $j+1$, de première composante β_1 gale à 1, tel qu'existe un i pour lequel $\beta_i \geq 2$, et s'il existe i avec $\beta_i = 2$, alors il existe $k \neq i$ avec $\beta_k \geq 2$. On suppose également que $\beta \succ e_1 + \cdots + e_{j-1} + 2e_j$.

On a, par construction, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset$.

Dans la suite, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient j un entier non nul, avec $j \geq 3$, et $T(s)$ un élément de $\mathcal{D}[[s]]$ tel que* $\operatorname{Supp} T \subset \Gamma_j$. *On a alors* $\operatorname{Supp}(p_j^{-s} T(s)) \subset \Gamma_{j+1}$.

Preuve: Par hypothèse, on a $\operatorname{Supp} T \subset \Gamma_j$. Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \ldots) \in \Gamma_j$. Il suffit de prouver que $e_j + \beta \succ e_1 + \cdots + e_j + 2e_{j+1}$. S'il existe un indice i, avec $i \leq j-1$, tel que l'on ait $\beta_i = 0$, alors c'est évident. Sinon, puisque $\beta \succ e_1 + \cdots + e_{j-1} + 2e_j$, il est nécessaire que $\beta_1 = \cdots = \beta_{j-1} = 1$. Mais alors β a deux autres composantes non nulles égales à 1, ou une autre composante non nulle égale à 2. Ceci est impossible, par définition de Γ_j. $\square$

Soient les séries de Dirichlet analytiques

$$f_1(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i^{-2s} \text{ et } f_2(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i^{-3s}.$$

On considère finalement I l'idéal de $\mathcal{D}\{s\}$ engendré par les séries f_1 et f_2. I est l'idéal finiment engendré qui va servir de contre-exemple pour l'existence d'une base standard.

Cet exemple est à rapprocher de l'exemple donné par J. Snellman [**8**, Appendix A] pour l'anneau formel des séries en une infinité de variables, considéré comme polynômes en un nombre fini de variables à coefficients séries formelles. Ici, pour prouver que cet idéal ne possède pas de bases standards, on construit une suite d'éléments de l'idéal, avec de bonnes propriétés sur les premiers termes. Pour cela, on suit pas à pas l'algorithme de Buchberger [**7**] qui, dans le cas classique, permet de fabriquer une base de Gröbner. Ceci est possible grâce aux théorèmes de division de [**3**] qui permettent de fabriquer des "S-séries" sans sortir du cadre des séries de Dirichlet *analytiques*. On observe alors que l'algorithme ne termine pas. Une analyse du premier terme des séries construites permet de conclure à l'absence de bases standards.

Proposition 3.2. *Pour tout entier $j \geq 1$, il existe dans I un élément h_j de la forme*

$$h_j(s) = p_1^{-s}p_2^{-s}\dots p_{j-1}^{-s}\left(\sum_{i=j}^{+\infty} p_i^{-2s}\right) - p_2^{-s}\dots p_{j-1}^{-s}\left(\sum_{i=j}^{+\infty} p_i^{-3s}\right) + R_{1,j}(s) + R_{2,j}(s),$$

avec $\operatorname{Supp} R_{1,j} \subset \Lambda_j$ *et* $\operatorname{Supp} R_{2,j} \subset \Gamma_j$.

On a donc $FT_{\prec}(h_j) = p_1^{-s}p_2^{-s}\dots p_{j-1}^{-s}p_j^{-2s}$.

Preuve: On raisonne par récurrence sur j.

Pour $j = 1$, la série $h_1(s) = f_1(s)$ convient. Pour $j = 2$, on pose $h_2(s) = p_1^{-s}f_1(s) - f_2(s)$. On écrit donc

$$h_2(s) = p_1^{-s}\left(\sum_{i=2}^{+\infty} p_i^{-2s}\right) - \left(\sum_{i=2}^{+\infty} p_i^{-3s}\right).$$

Ainsi, on a $R_{1,2}(s) = R_{2,2}(s) = 0$. Dans la suite, on considère $j \geq 3$. De manière générale, on construit alors h_{j+1} à partir de h_1 et de h_j en suivant l'algorithme donnant les bases standards pour les idéaux de séries convergentes [**7**]. Pour ce faire, on considère la série

$$S(h_1, h_j) = p_2^{-s}\dots p_{j-1}^{-s}p_j^{-2s}h_1 - p_1^{-s}h_j.$$

Par construction, $S(h_1, h_j)$ appartient à l'idéal I et les premiers termes donnés par l'ordre $\preceq$ s'éliminent. On calcule alors le reste de la division de $S(h_1, h_j)$ dans $\mathcal{D}\{s\}$ par h_1 et h_j [**3**]. On le note $S_{j+1}^{(1)}$; il appartient clairement à l'idéal I et est de la forme

$$(3)\quad S_{j+1}^{(1)} = -p_1^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-2s}\right) + p_2^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-3s}\right) + A_{j+1}^{(1)} + B_{j+1}^{(1)} - p_1^{-s}R_{1,j} - p_j^{-s}R_{2,j},$$

avec

$$A_{j+1}^{(1)} = A_{j+1}^{(0)} - p_j^{-s} R_{1,j} + p_2^{-s} \dots p_{j-1}^{-s} p_j^{-4s},$$

$$B_{j+1}^{(1)} = p_1^{-s} \dots p_{j-1}^{-s} \left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-3s} \right),$$

et

$$\begin{aligned} A_{j+1}^{(0)} &= p_2^{-s} \dots p_{j-1}^{-s} p_j^{-2s} \left(\sum_{i=2}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) \\ &\quad + \left(p_2^{-s} \dots p_{j-1}^{-s} \right) \left(\sum_{i=2}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) \left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) + \left(\sum_{i=2}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) \Sigma_{2,j}, \end{aligned}$$

en notant $R_{2,j} = p_1^{-s} \Sigma_{2,j}$.

Puisque l'on a clairement $\operatorname{Supp}(p_j^{-s} R_{1,j}) \subset \Lambda_{j+1}$ et $\operatorname{Supp}(p_2^{-s} \dots p_{j-1}^{-s} p_j^{-4s}) \subset \Lambda_{j+1}$, on en déduit $\operatorname{Supp} A_{j+1}^{(1)} \subset \Lambda_{j+1}$. De même, il est facile de voir que l'on a $\operatorname{Supp} B_{j+1}^{(1)} \subset \Gamma_{j+1}$.

Grâce au Lemme 3.1, on a aussi $\operatorname{Supp}(p_j^{-s} R_{2,j}(s)) \subset \Gamma_{j+1}$. On a enfin la décomposition suivante

$$\begin{aligned} - p_1^{-s} R_{1,j} = T^{(1)}(s) + \tilde{T}^{(1)}(s) \text{ avec } &\operatorname{Supp} \tilde{T}^{(1)} \subset \Gamma_{j+1} \\ \text{et } &\operatorname{Supp} T^{(1)} \subset (e_1 + \Lambda_j) \backslash \Gamma_{j+1}. \end{aligned}$$

On pose

$$R_{1,j+1}^{(1)} = A_{j+1}^{(1)} \text{ et } R_{2,j+1}^{(1)} = B_{j+1}^{(1)} - p_j^{-s} R_{2,j} + \tilde{T}^{(1)}(s).$$

L'égalité (3) s'écrit donc

$$\begin{aligned} S_{j+1}^{(1)} = p_1^{-s} \dots p_j^{-s} \left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) - p_2^{-s} \dots p_j^{-s} \left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-3s} \right) \\ + R_{1,j+1}^{(1)} + R_{2,j+1}^{(1)} + T^{(1)}, \end{aligned}$$

avec $\operatorname{Supp} R_{1,j+1}^{(1)} \subset \Lambda_{j+1}$, $\operatorname{Supp} R_{2,j+1}^{(1)} \subset \Gamma_{j+1}$ et $\operatorname{Supp} T^{(1)} \subset (e_1 + \Lambda_j) \backslash \Gamma_{j+1}$.

On note, pour tout $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Omega^{(l)} = \{ \alpha \in (e_1 + \Lambda_j) \backslash \Gamma_{j+1} \text{ tel que, pour } 2 \leq r \leq l, \ (e_1 + \dots + e_{r-1} + 2e_r) \\ \text{ne divise pas } \alpha \}, \end{aligned}$$

avec la convention qu'un multi-indice α divise un multi-indice β si et seulement si $\psi(\alpha)$ divise $\psi(\beta)$. Ceci revient encore à dire que pour chaque i, $\alpha_i \leq \beta_i$ (pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$). On a alors le résultat suivant.

Lemme-clé 3.3. *Pour tout indice* $1 \leq l \leq j+1$, *il existe dans* I *une série de la forme*

$$S_{j+1}^{(l)} = p_1^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-2s}\right) - p_2^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-3s}\right) + R_{1,j+1}^{(l)} + R_{2,j+1}^{(l)} + T^{(l)},$$

avec $\operatorname{Supp} R_{1,j+1}^{(l)} \subset \Lambda_{j+1}$, $\operatorname{Supp} R_{2,j+1}^{(l)} \subset \Gamma_{j+1}$ *et* $\operatorname{Supp} T^{(l)} \subset \Omega^{(l)}$.

Avant de prouver ce lemme-clé, on termine la preuve de la Proposition 3.2 en remarquant que $\Omega^{(j+1)} = \emptyset$. En effet, si β appartient à $\Omega^{(j+1)}$, alors ou bien l'un des β_i, avec $i \leq j$, est nul, ou bien β_{j+1} est inférieur strict à 2. Mais l'une ou l'autre de ces propriétés assurent que l'on a la relation $\beta \succ e_1+\dots+e_{j-1}+2e_j$ et donc que β est élément de Γ_{j+1} : c'est impossible. Il suffit alors de poser $h_{j+1} = S_{j+1}^{(j+1)}$ et la Proposition 3.2 est démontrée. □

Preuve du Lemme-clé 3.3: Le cas $l = 1$ correspond à la série $S_{j+1}^{(1)}$ de l'égalité (3). On raisonne par récurrence et on suppose la propriété vraie au rang $l-1$. On a donc l'existence dans I d'une série de la forme

$$S_{j+1}^{(l-1)} = p_1^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-2s}\right) - p_2^{-s}\dots p_j^{-s}\left(\sum_{i=j+1}^{+\infty} p_i^{-3s}\right) + R_{1,j+1}^{(l-1)} + R_{2,j+1}^{(l-1)} + T^{(l-1)},$$

avec $\operatorname{Supp} R_{1,j+1}^{(l-1)} \subset \Lambda_{j+1}$, $\operatorname{Supp} R_{2,j+1}^{(l-1)} \subset \Gamma_{j+1}$ et $\operatorname{Supp} T^{(l-1)} \subset \Omega^{(l-1)}$.

Il suffit de prouver que, pour tout $\gamma \in \Omega^{(l-1)}\backslash\Omega^{(l)}$, le monôme $p_1^{-\gamma_1 s}\dots p_k^{-\gamma_k s}$ s'écrit

$$p_1^{-\gamma_1 s}\dots p_k^{-\gamma_k s} = U_\gamma + V_\gamma + W_\gamma + H_\gamma,$$

où $U_\gamma \in I$, $\operatorname{Supp}\ V_\gamma \subset \Lambda_{j+1}$, $\operatorname{Supp} W_\gamma \subset \Gamma_{j+1}$ et $\operatorname{Supp} H_\gamma \subset \Omega^{(l)}$.

Soit un tel γ, qui est donc divisible par $e_1+\dots+e_{l-1}+2e_l$. Puisque γ n'est pas élément de Γ_{j+1}, on a la relation $\gamma \prec e_1+\dots+e_j+2e_{j+1}$. Ceci entraîne les relations $\gamma_1 = \dots = \gamma_{l-1} = 1$ et $\gamma_l \geq 2$. On remarque, en outre, que si $\gamma_l \leq 3$, il existe un autre indice u pour lequel $\gamma_u \geq 2$

(car $\gamma \in e_1 + \Lambda_j$). La division du monôme correspondant par la série h_l dans $\mathcal{D}\{s\}$ donne

$$p_1^{-\gamma_1 s} \dots p_k^{-\gamma_k s} = \Bigg[h_l - p_1^{-s} p_2^{-s} \dots p_{l-1}^{-s} \left(\sum_{i=l+1}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) + p_2^{-s} \dots p_{l-1}^{-s} \left(\sum_{i=l}^{+\infty} p_i^{-3s} \right) - R_{1,l} - R_{2,l} \Bigg] p_l^{-(\gamma_l - 2)s} p_{l+1}^{-\gamma_{l+1} s} \dots p_k^{-\gamma_k s}.$$

Clairement, $h_l p_l^{-s(\gamma_l - 2)} p_{l+1}^{-s\gamma_{l+1}} \dots p_k^{-s\gamma_k}$ appartient à I. D'autre part, les multi-indices du support des termes de

$$\left(p_2^{-s} \dots p_{l-1}^{-s} \left(\sum_{i=l}^{+\infty} p_i^{-3s} \right) + R_{1,l} \right) p_l^{-(\gamma_l - 2)s} p_{l+1}^{-\gamma_{l+1} s} \dots p_k^{-\gamma_k s}$$

sont dans Λ_{j+1}. En effet, parmi les entiers $\gamma_l - 2$, $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_k$, il en est au moins un qui est supérieur ou égal à 2. De même, il est facile de se convaincre, par construction, que les multi-indices du support des termes de $p_l^{-(\gamma_l - 2)s} p_{l+1}^{-\gamma_{l+1} s} \dots p_k^{-\gamma_k s} R_{2,l}$ appartiennent à Γ_{j+1}. Il reste les termes issus du produit

$$p_1^{-s} p_2^{-s} \dots p_{l-1}^{-s} \left(\sum_{i=l+1}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) p_l^{-(\gamma_l - 2)s} p_{l+1}^{-\gamma_{l+1} s} \dots p_k^{-\gamma_k s},$$

pour lesquels on considère 2 cas.

Premier cas: $\gamma_l = 2$ ou 3. Clairement, on obtient alors des termes dont les supports sont inclus dans $\Omega^{(l)} \cup \Gamma_{j+1}$.

Deuxième cas: $\gamma_l \geq 4$. Il faut alors encore traiter, pour $i \geq l + 1$, $\gamma' = \gamma - 2e_l + e_i$. Si $\gamma' \in \Gamma_{j+1}$, c'est terminé. Sinon, γ' appartient à $\Omega^{(l-1)}$ et on se ramène au problème précédent, mais avec $\gamma'_l = \gamma_l - 2$. Il suffit donc de réitérer la division par h_l un nombre fini de fois. □

3.2. Application au problème de division.

On revient au cas général d'un ordre $\preceq$ quelconque sur $\mathbb{N}^*$, compatible avec la valuation p-adique, et tel que toute partie non vide admet un plus petit élément. Si J est un idéal finiment engendré de $\mathcal{D}\{s\}$, on note

$$FT_{\preceq}(J) = \{FT_{\preceq}(f)\,;\, f \in J\}\,.$$

Définition 3.4. On dit que $g_1, \ldots, g_m$ est une base standard (ou base de Gröbner) de J (pour l'ordre $\preceq$) si tout élément de $FT(J)$ est divisible par l'un des $FT(g_1), \ldots, FT(g_m)$.

Théorème 3.5. *Soit I l'idéal défini dans le Paragraphe 2.1. Alors I n'admet pas de base standard.*

Preuve: Supposons que I admette une base standard $(g_1, \ldots, g_m)$, ne comprenant pas 0. La définition de I étant complètement symétrique en les nombres premiers, on peut toujours supposer $p_1 \preceq p_2 \preceq \ldots$. D'après la Proposition 3.2, l'idéal I contient des séries du type h_j. Clairement on a

$$FT_{\preceq}(h_j) = p_1^{-s} \ldots p_{j-1}^{-s} p_j^{-2s}.$$

On note

$$FT_{\preceq}(g_k) = p_1^{-\alpha_1^k s} \ldots p_r^{-\alpha_r^k s}.$$

Par construction de l'idéal, il est clair que pour chaque k, il existe un entier l_k pour lequel $\alpha_{l_k}^k \geq 2$. On note

$$u = \max\left(l_k\,;\, 1 \leq k \leq m\right).$$

Puisque $(g_1, \ldots, g_m)$ est une base standard de I, pour chaque j, il existe un entier k_j tel que

$$FT_{\preceq}(g_{k_j}) \text{ divise } FT_{\preceq}(h_j).$$

En particulier, on obtient

$$\alpha_1^{k_j} \leq 1, \ldots, \alpha_{j-1}^{k_j} \leq 1. \tag{4}$$

Testant (4) avec $j = u + 1$, on trouve une contradiction. $\square$

Remarque. Il est remarquable que, dans le théorème précédent, l'idéal I n'admette pas de base standard quelque soit l'ordre que l'on impose. L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ constitue donc l'exemple d'un anneau commutatif analytique, où il existe des divisions, et qui ne possède pas de bases de type "Gröbner".

Corollaire 3.6. *Soit J un idéal finiment engendré de $\mathcal{D}\{s\}$. Il n'existe pas, en général, une famille finie de générateurs $(g_1, \ldots, g_k)$ de J telle que, pour tout f de $\mathcal{D}\{s\}$, le reste de la divison de f par $(g_1, \ldots, g_k)$ est nul si et seulement si $f \in J$.*

Preuve: Si $(g_1, \ldots, g_k)$ était une telle famille de l'idéal I, les propriétés de la division de type Weierstrass [**2**] entraînent que $(g_1, \ldots, g_k)$ serait une base standard de I, ce qui n'est pas. $\square$

Remarques. a) On peut trouver des idéaux de type fini J de $\mathcal{D}\{s\}$ qui possèdent bien une base standard. De manière évidente, il y a déjà tous les idéaux engendrés par des éléments dont le support est inclus dans un sous-ensemble $\mathbb{N}^l$ de $\mathbb{N}^{(\infty)}$. Mais cette dernière condition n'est pas nécessaire. Par exemple, si J est l'idéal engendré par

$$a_1(s) = p_1^{-2s} + p_2^{-3s} + \sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-4s} \text{ et } a_2(s) = p_1^{-s} + p_2^{-s} + \sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-2s},$$

alors on montre que la famille $(a_2(s), a_3(s))$, avec

$$a_3(s) = p_2^{-2s} + p_2^{-3s} + \sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-4s} + 2p_2^{-s} \sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-2s} + \left(\sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-2s} \right)^2$$

est une base standard pour J. On vérifie d'ailleurs l'égalité

$$a_1(s) = \left(p_1^{-s} - p_2^{-s} - \sum_{i=3}^{+\infty} p_i^{-2s} \right) a_2(s) + a_3(s).$$

b) Soient $f_1(s), \dots, f_k(s)$ des éléments de $\mathcal{D}\{s\}$. On note I l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathcal{D}\{s\}$ et I_f l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathcal{D}[[s]]$. On suppose, de plus, que I possède une base standard. On a alors, par construction,

$$(*) \qquad I_f \cap \mathcal{D}\{s\} = I.$$

Si $k = 1$, c'est à dire si I est principal, la propriété $(*)$ est toujours vraie [**2**]. On peut alors poser la question suivante : la relation $(*)$ est-elle vraie pour tout idéal de type fini ? On obtiendrait ainsi la platitude de l'anneau $\mathcal{D}[[s]]$ sur $\mathcal{D}\{s\}$, ce qui serait une généralisation du cas classique des séries formelles et convergentes en un nombre fini de variables.

Références

[1] M. Artin, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.* **5** (1968), 277–291.

[2] F. Bayart et A. Mouze, Factorialité de l'anneau des séries de Dirichlet analytiques, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336(3)** (2003), 213–218.

[3] F. Bayart et A. Mouze, Division et composition dans l'anneau des séries de Dirichlet analytiques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53(7)** (2003), 2039–2060.

[4] H. Bohr, Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **143** (1913), 203–211.

[5] E. M. Chirka, *"Complex analytic sets"*, translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen, Mathematics and its Applications (Soviet Series) **46**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.

[6] K. Grelowski, Integral closure of $\mathbb{C}\{X\}$ in $\mathbb{C}[[X]]$ via the Puiseux theorem, *Univ. Iagel. Acta Math.* **40** (2002), 91–93.

[7] T. de Jong et G. Pfister, *"Local analytic geometry. Basic theory and applications"*, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000.

[8] J. Snellman, Gröbner bases and normal forms in a subring of the power series ring on countably many variables, *J. Symbolic Comput.* **25(3)** (1998), 315–328.

[9] J.-C. Tougeron, *"Idéaux de fonctions différentiables"*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **71**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

Frédéric Bayart:
LaBag, UMR 5467
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France
E-mail address: `Frederic.Bayart@math.u-bordeaux.fr`

Augustin Mouze:
Laboratoire AGAT, UMR 8524
Université de Lille 1
F-59650 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
E-mail address: `Augustin.Mouze@math.univ-lille1.fr`

Primera versió rebuda el 7 de gener de 2004,
darrera versió rebuda el 23 d'abril de 2004.