José Sanmartín Esplugues

CONSISTENCIA Y ARBOLES LOGICOS

Mostraré en lo que sigue cómo la introducción de algunas modificaciones en el método corriente de árboles lógicos (vide, por ejemplo: R. M. Smullyan: *First Order Logic*, Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1968) permite su aplicación a problemas de consistencia para formalismos de primer orden.

§1. Conceptos básicos

Sea L un formalismo de primer orden cuyo léxico se divida en las categorías de: (a) constantes individuales: *a*, *b*, *c*, ...; (b) variables: x, y, z, ...; (c) constantes lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (conectores) y Λ, V (cuantificadores); (d) predicadores n-ádicos: P^n, Q^n, R^n, ... Se usan los signos (,) — paréntesis — como desambiguadores.

Mediante signos metalingüísticos definimos:

(1) Cualquier constante individual de L es un término de L.
(2) Cualquier variable de L es un término de L.
(3) Si $t_1, ..., t_n$ son términos de L: $P^n t_1, ..., t_n$ es una fórmula de L.
(4) Si α es una fórmula de L, $\neg\, \alpha$ es una fórmula de L.
(5) Si α y β son fórmulas de L: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ son fórmulas de L.
(6) Si α es una fórmula de L y x una variable de L: $\Lambda x\alpha$ y $\mathrm{V}x\alpha$ son fórmulas de L.

En lo sucesivo: (i) denominaremos «fórmula atómica» a toda fórmula $P^n t_1, ..., t_n$ donde $t_1, ..., t_n$ están por constantes individuales; (ii) eliminaremos el índice n de los predicadores; (3) — con las definiciones usuales de ocurrencia libre y ligada de una variable — entenderemos por una *sentencia* de L una fórmula cualquiera de L en la que ninguna variable ocurra libre.

Diremos que *I es una interpretación de* L sii $I = \langle D, A \rangle$, donde D es un conjunto no vacío, denominado «el dominio de I» y A es una asignación tal que: (1) a cada constante individual y a cada variable de L asigna un individuo de D; (2) a cada predicador asigna un conjunto en D (la «extensión» del predicador en D) y (3) a cada conector asigna su significado usual veritativo-funcional. Siguiendo el proceder usual: (i) en lugar de escribir A(*a*) o A(x) para referirnos al individuo en D asignado a *a* o a x respectivamente, escribiremos I(a) o I(x), respectivamente; (ii) si $I = \langle D, A \rangle$

es una interpretación de L, mediante I^{δ}_{x}, $\delta \in D$, denotaremos la interpretación que difiere de I *a lo sumo* en el individuo δ de D que asigna a x; (iii) definiremos recursivamente la noción de *satisfacción* así:

1. I sat $Pt_1, ..., t_n$ sii $<I(t_1), ..., I(t_n)> \in I(P)$
2. I sat $\neg \alpha$ sii no I sat α
3. I sat $\alpha \wedge \beta$ sii I sat α y I sat β
4. I sat $\alpha \vee \beta$ sii I sat α o I sat β
5. I sat $\alpha \rightarrow \beta$ sii no I sat α o I sat β
6. I sat $\Lambda x\alpha$ sii $\cap\, \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat α
7. I sat $V x\alpha$ sii $\cup\, \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat α

donde «sat» abrevia «satisface», «$\cap$» se lee «para todo» y «$\cup$» se lee «para algún»; (iv) decimos que una sentencia α *es verdadera* para I sii I sat α, y (v) decimos, finalmente, que una interpretación I es un *modelo* para un conjunto de sentencias, Γ, no necesariamente no-vacío, sii toda sentencia en Γ es verdadera para I.

Ejemplo 1: Sea α la sentencia $\Lambda x(Px \rightarrow Qx)$. Fijemos un dominio D, digamos $D = \{0\}$, para una interpretación I de α. Sean las asignaciones de dicha interpretación las siguientes: $I(P) = \emptyset$, $I(Q) = \{0\}$ —claramente, tanto $\emptyset$ como $\{0\}$ son subconjuntos de D. Entonces I sat α sii $\cap\, \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat $Px \rightarrow Qx$ sii no I^{δ}_{x} sat Px o I^{δ}_{x} sat Qx. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D y $0 \notin \emptyset$, entonces no I^{δ}_{x} sat Px para todo $\delta \in D$. Luego I sat α. Luego α es verdadera.

§2. Independencia y árboles lógicos

Sea α una sentencia de L. Sea Γ un conjunto de sentencias de Γ; Γ puede ser el $\emptyset$.

Se dice que α *es una consecuencia sintáctica de* Γ, en signos $\Gamma \vdash \alpha$, sii α se deja derivar formalmente de Γ. Decidir qué α es una consecuencia sintáctica de Γ consiste, así, en presentar al menos *una* derivación formal de α a partir de Γ. Pero, entonces, para decidir que α *no* es una consecuencia sintáctica de Γ deberán presentarse *todas* las derivaciones formales a partir de Γ y mostrarse que *ninguna* de ellas tiene por conclusión α. Esta última tarea es en principio *no realizable.*

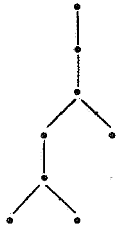
Se dice que α *es una consecuencia semántica de* Γ, en signos $\Gamma \models \alpha$, sii toda interpretación, que satisfaga Γ, satisface α. Para L es demostrable que $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\Gamma \models \alpha$. Mediante este (meta)teorema decidir cuándo α *no* es una consecuencia sintáctica de Γ se convierte en decidir cuándo α *no* es una consecuencia semántica de Γ y esta tarea es (fácilmente) *realizable:* basta con presentar al menos *una* interpretación que satisfaga Γ y no satisfaga a la vez α. En este caso decimos también que α ES INDEPENDIENTE DE Γ.

Ejemplo 2: Para probar que Vx(Px ∧ Qx) es independiente de VxPx ∧ VxQx propongamos {0,1} como dominio D para una interpretación I tal que I(P) = {0} y I(Q) = {1}. Entonces: I sat VxPx ∧ VxQx sii I sat VxPx y I sat VxQx sii, por tanto, U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Px y U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Qx. Para $\delta = 0$ es el caso que $0 \in \{0\}$, luego U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Px. Para $\delta = 1$ es el caso que $1 \in \{1\}$; luego U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Qx. Luego I sat VxPx ∧ VxQx. Por el contrario, I sat Vx(Px ∧ Qx) sii U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Px ∧ Qx sii I_x^δ sat Px y I_x^δ sat Qx; pero cuando $\delta = 0$, no es el caso que, a la vez, $0 \in \{0\}$ y $0 \in \{1\}$, y cuando $\delta = 1$ tampoco es el caso que $1 \in \{0\}$ y $1 \in \{1\}$ a la vez. Luego no U $\delta \in$ D: I_x^δ sat Px y I_x^δ sat Qx; i.e. no I sat Vx(Px ∧ Qx). Por tanto I sat ¬ Vx(Px ∧ Qx). Así Vx(Px ∧ Qx) queda probada como independiente de VxPx ∧ VxQx.

Hallar una interpretación adecuada al fin fijado ha dependido hasta hace poco de la *intuición* del que se ocupaba en estas tareas, intuición, desde luego, canalizada por la definición de satisfacción. UN PROCEDIMIENTO MECANICO PARA OBTENER INTERPRETACIONES TALES LO CONSTITUYE HOY EL METODO CORRIENTE DE ARBOLES LOGICOS.

Más que eso: este método nos capacita para hallar *esquemas* de interpretaciones de los que generar interpretaciones particulares (las que denominaremos «interpretaciones propuestas»). Usualmente nuestras interpretaciones propuestas serán aritméticas; interpretaciones en las que D sea un subconjunto del conjunto de números naturales.

Por un árbol lógico se entiende una configuración que consta de puntos y segmentos lineales, por ejemplo ésta:



tal que cada punto está ocupado por *un sentencia con un valor de verdad,* V o F, prefijado y precedido todo ello por un número natural (a partir de 1). Denominamos «fórmula signada», siguiendo a Smullyan, a la composición de signos Vα o Fα.

Los siguientes hechos son muy conocidos:

(1) ¬ α es verdadera sii α es falsa

(2) $\neg\alpha$ es falsa sii α es verdadera
(3) $\alpha \wedge \beta$ es verdadera sii α es verdadera y β es verdadera
(4) $\alpha \wedge \beta$ es falsa sii α es falsa o β es falsa
(5) $\alpha \vee \beta$ es verdadera sii α es verdadera o β es verdadera
(6) $\alpha \vee \beta$ es falsa sii α es falsa y β es falsa
(7) $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadera sii α es falsa o β es verdadera
(8) $\alpha \rightarrow \beta$ es falsa sii α es verdadera y β es falsa.

(1)-(8) establecen el valor de verdad de toda fórmula de L, compuesta mediante conectores, en base a los valores de verdad de las fórmulas componentes. Traducido ello a las categorías de interpretación arriba introducidas podríamos decir: para hallar una interpretación que satisfaga una fórmula de L, compuesta mediante conectores, es suficiente hallar una interpretación que satisfaga (o *no*) alguna o todas las fórmulas componentes de aquélla, según los hechos arriba establecidos. Podríamos arbitrar reglas que recogieran esos hechos, *reduciendo* así el valor de verdad de las fórmulas compuestas a los valores de verdad de las fórmulas componentes. Como reglas a este respecto proponemos las siguientes:

R.1.

(a) $$\frac{V\neg\alpha}{F\alpha}$$ (b) $$\frac{F\neg\alpha}{V\alpha}$$

R.2.

(a) $$\frac{V(\alpha\wedge\beta)}{\begin{array}{c}V\alpha\\ V\beta\end{array}}$$ (b) $$\frac{F(\alpha\wedge\beta)}{F\alpha \mid F\beta}$$

R.3.

(a) $$\frac{V(\alpha\vee\beta)}{V\alpha \mid V\beta}$$ (b) $$\frac{F(\alpha\vee\beta)}{\begin{array}{c}F\alpha\\ F\beta\end{array}}$$

R.4.

(a) $$\frac{V(\alpha\rightarrow\beta)}{F\alpha \mid V\beta}$$ (b) $$\frac{F(\alpha\rightarrow\beta)}{\begin{array}{c}V\alpha\\ F\beta\end{array}}$$

Comentarios a R.1.-R.4. (i) En general, las reglas R.1-R.4. establecen que, si la fórmula signada escrita sobre la raya horizontal ocupa un punto en un árbol, entonces la o las fórmulas signadas escritas debajo de esa raya ocuparán nuevos puntos en el árbol. Si estas últimas están superpuestas en la regla, entonces los puntos que ocupen en el árbol y el punto ocupado por la fórmula signada a que se aplique la regla en cuestión estarán «*en cadena*»; así:

$$\begin{array}{r l} n & V(\alpha \wedge \beta) \\ | & \\ n+1 & V\alpha \\ | & \\ n+2 & V\beta \end{array}$$

Pero si esas fórmulas están separadas por | en la regla, ello significará que la fórmula signada a que se aplique la regla conducirá a una *alternativa*, que representaremos en el árbol mediante una *bifuración* a partir de la fórmula signada en cuestión; así:

$$\begin{tikzcd} & n\ V(\alpha \vee \beta) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ n+1\ V\alpha & & n+2\ V\beta \end{tikzcd}$$

Las fórmulas signadas entre las que se establece la alternativa, como $V\alpha$ y $V\beta$ arriba, se denominan «fórmulas de referencia». Se denomina «*rama*» de un árbol lógico al conjunto de fórmulas signadas que están *en cadena* con una fórmula de referencia. Así en:

$$\begin{tikzcd} & n\ F\zeta \arrow[d, no head] & \\ & n+1\ V(\alpha \vee \beta) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ n+2\ V\alpha \arrow[d, no head] & & n+3\ V\beta \arrow[d, no head] \\ n+4\ F(\gamma \rightarrow \eta) \arrow[d, no head] & & n+7\ F(\gamma \rightarrow \eta) \arrow[d, no head] \\ n+5\ V\gamma \arrow[d, no head] & & n+8\ V\gamma \arrow[d, no head] \\ n+6\ F\eta & & n+9\ F\eta \end{tikzcd}$$

una rama está constituida por $F\zeta$, $V(\alpha \vee \beta)$, $V\alpha$, $F(\gamma \rightarrow \eta)$, $V\gamma$ y $F\eta$; otra por $F\zeta$, $V(\alpha \vee \beta)$, $V\beta$, $F(\gamma \rightarrow \eta)$, $V\gamma$ y $F\eta$.

Por extensión del concepto denominaremos «rama» a todo conjunto de fórmulas en cadena; de modo que un árbol sin bifuraciones será una sola rama. (ii) Bajo cualquier interpretación, por una parte, Vα es verdadera si α es verdadera, y falsa si α es falsa; por otra, Fα es verdadera si α es falsa y Fα es falsa si α es verdadera. Así, el valor de verdad de Vα es el mismo que el de α, y el valor de verdad de Fα es el mismo que el de $\neg\alpha$. Por ello, siguiendo a Smullyan, aunque *heurísticamente* es útil escribir fórmulas signadas, desde el punto de vista *teórico* podemos eliminar simplemente V y sustituir F por $\neg$. Ello favorecerá la exposición en lo sucesivo. De acuerdo con este modo de proceder es evidente que R.1.(a) es superflua; así, sustituiremos simplemente R.1(a) y R.1.(b) por:

R.1.

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

De acuerdo asimismo con el Comentario (ii) a R.1.-R.4., podemos establecer reglas para cuantificaciones así:

R.5.

(a) $\dfrac{\Lambda x\, Px}{Pa}$, donde *a* es *cada* constante individual que haya sido o vaya a ser introducida;

(b) $\dfrac{\neg \Lambda x\, Px}{\neg Pa}$, donde *a* es una constante individual *nueva;*

R.6.

(a) $\dfrac{\mathrm{V}x\, Px}{Pa}$, donde *a* es una constante individual *nueva;*

(b) $\dfrac{\neg \mathrm{V}x\, Px}{\neg Pa}$, donde *a* es *cada* constante individual que haya sido o vaya a ser introducida.

Comentarios a R.5. y R.6. (i) La condición introducida sobre *a* en R.5.(b) y R.6.(a) responde a las mismas motivaciones que las introducidas para parámetros en la regla de eliminación de cuantificador existencial en sistemas de deducción natural. (ii) La constante individual *a* en R.5.(a) y R.6.(b) podría ser *cualquiera* en principio (utilizando el término «universo de discurso» para significar el conjunto de las constantes individuales por todas las cuales o por alguna de las cuales está la variable, diríamos «cualquiera de las constantes individuales del universo de discurso de la variable x»). Sin embargo, en estas reglas se habla no de «cualquiera», sino de «cada»; el porqué de ello se explicará con detalles más adelante.

Por una parte, mediante R.1. a R.6. *analizamos* fórmulas hasta llegar a fórmulas atómicas. Ya que toda fórmula en un árbol tiene un valor de verdad, a través de este análisis se llega a fórmulas atómicas con un valor de verdad. Se conoce así el valor de verdad de las fórmulas atómicas en base al cual las fórmulas, que se obtengan de aquéllas, tienen un valor de verdad determinado. En lo sucesivo denominaremos «ATOMO» a una fórmula atómica con un valor de verdad fijado.

Ejemplo 3: Para analizar $\bigwedge x \neg(Px \rightarrow Qx)$ hacemos:

$$\begin{array}{l} 1\ \bigwedge x \neg(Px \rightarrow Qx) \\ | \\ 2\ \neg(Pa \rightarrow Qa) \\ | \\ 3\ Pa \\ | \\ 4\ \neg Qa \end{array}$$

lo que significa: si es verdad que *a* cumple P y que *a* no cumple Q, entonces es verdad que $\bigwedge x \neg(Px \rightarrow Qx)$.

Por otra parte nuestra finalidad en pruebas de independencia, por ejemplo para una sentencia α respecto de un conjunto de sentencias Γ en L, es hallar una interpretación que satisfaga Γ y no satisfaga α; por tanto una interpretación que sea un *modelo* de $\{\Gamma, \neg\alpha\}$. Por ello la estrategia para construir un árbol adecuado a este fin consistirá en introducir como primeros puntos del árbol las sentencias en Γ y $\neg\alpha$. Aplicando las reglas R.1-R.6. a las sentencias en Γ y a $\neg\alpha$ llegaremos a átomos. Si en una misma rama una misma fórmula atómica ocurre como verdadera y falsa, por ejemplo P*a* y $\neg$ P*a*, ello significará que no es posible encontrar, siguiendo tal rama, una interpretación que satisfaga Γ y $\neg\alpha$, ya que para tal interpretación el individuo asignado a *a* deberá pertenecer y no pertenecer a la vez al conjunto, en el dominio, asignado a P. Cuando ello ocurra, escribiremos bajo la rama en cuestión $\otimes$ y diremos que «la rama está *clausurada*». Si todas las ramas están clausuradas, entonces ninguna interpretación satisface Γ y $\neg\alpha$; luego, para toda interpretación, si satisface Γ, satisface α. Luego α es, en este caso, una consecuencia semántica de Γ. Por tanto, α es una consecuencia sintáctica de Γ.

Por el contrario, si alguna rama no está clausurada, entonces los átomos de esa rama indicarán un esquema de interpretación del que generar interpretaciones propuestas que satisfagan Γ y $\neg\alpha$; luego, α será en este caso independiente de Γ.

Ejemplo 4: Decídase si $\Lambda x(Px \to Qx)$ es independiente de $\{\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx\}$.

1 $\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx$

2 $\neg\, \Lambda x(Px \to Qx)$

3 $\neg\, (Pa \to Qa)$

4 Pa

5 $\neg\, Qa$

6 $\neg\, \Lambda x\, Px$ | 7 $\Lambda x\, Qx$

8 $\neg\, Pb$ | 9 Qa ⊗

La rama 1-2-3-4-5-6-8, no clausurada, contiene los átomos P*a*, $\neg$ Q*a* y $\neg$ P*b*. En tales átomos ocurren sólo dos constantes individuales. Ello nos indica un esquema de interpretación cuyo dominio conste de dos individuos al menos, los denotados por *a* y *b*. Ya que *a* cumple P, el conjunto en D asignado a P será el conjunto que conste del individuo asignado a *a solamente*. Así es evidente que nos adecuaremos al átomo $\neg$ P*b*: el individuo asignado a *b* ciertamente no pertenecerá al conjunto asignado a P. Finalmente, ya que *a* no cumple Q deberemos asignar a Q un conjunto en D al que el individuo asignado a *a* no pertenezca; en este caso caben dos posibilidades: asignar a Q el conjunto que consta sólo del individuo asignado a *b* o, la solución más simple, asignar a Q el Ø. A partir de este esquema de interpretación podemos proponer la interpretación I siguiente: $I = \langle D, A \rangle$, donde $D = \{0, 1\}$, $I(P) = \{0\}$ y $I(Q) = \varnothing$.

Para mostrar ahora que esta interpretación propuesta satisface $\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx$ y $\neg\, \Lambda x(Px \to Qx)$, y, por tanto, que $\Lambda x(Px \to Qx)$ es independiente de $\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx$, podemos aplicar las categorías de semántica tarskiana antes aprendidas. Así:

(a) I sat $\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx$ sii no I sat $\Lambda x\, Px$ o I sat $\Lambda x\, Qx$ sii no $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat Px, o $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat Qx. Para $\delta = 1$, entonces $1 \notin \{0\}$. Luego hay un $\delta \in D$: no I^{δ}_{x} sat Px. Por tanto no $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat Px. Luego I sat $\Lambda x\, Px \to \Lambda x\, Qx$.

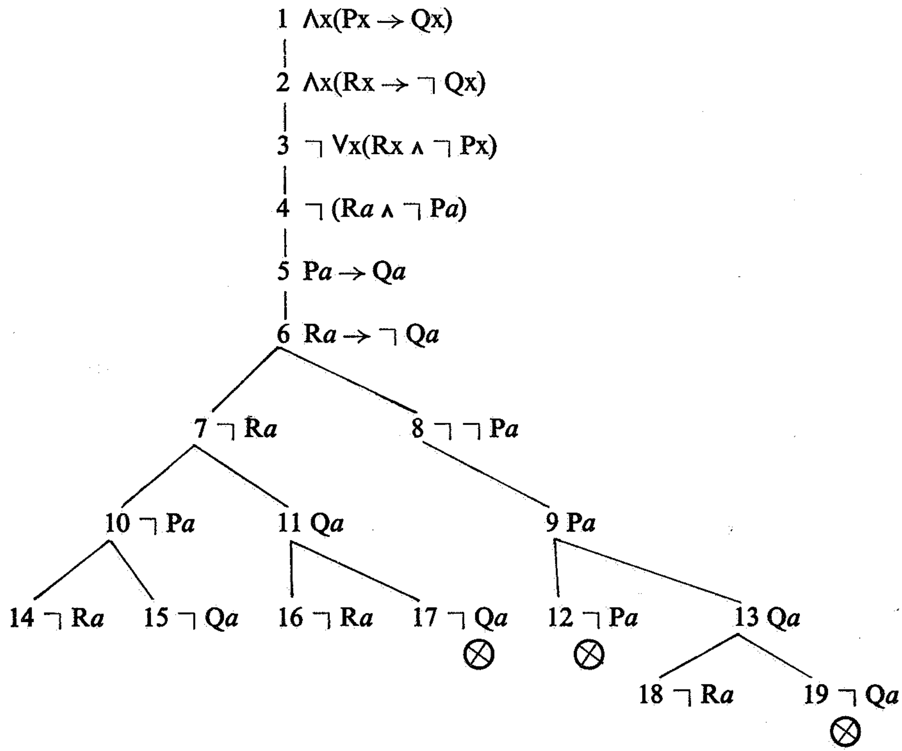
(b) I sat $\Lambda x(Px \to Qx)$ sii $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat $Px \to Qx$ sii no I^{δ}_{x} sat Px o I^{δ}_{x} sat Qx. Para $\delta = 0$, entonces $0 \in \{0\}$; luego I^{δ}_{x} sat Px para

$\delta = 0$. Además, no es el caso que $0 \in \emptyset$; luego no I^{δ}_{x} sat Qx para $\delta = 0$. Luego hay al menos un $\delta \in D$, a saber $\delta = 0$, tal que I^{δ}_{x} sat Px y no I^{δ}_{x} sat Qx, i.e. tal que *no* es el caso de que no I^{δ}_{x} sat Px o I^{δ}_{x} sat Qx. En consecuencia no $\bigcap \delta \in D$: no I^{δ}_{x} sat Px o I^{δ}_{x} sat Qx. Luego no I sat $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$. Por tanto I sat $\neg \bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$.

Una vez expuesta la estrategia resulta evidente que, con el fin de hallar fácilmente las mismas fórmulas atómicas con valores de verdad distintos (¡si ello fuera posible!), si el punto de partida lo constituyen sentencias una de las cuales, al menos, es particular, la constante individual que se vaya a introducir por aplicación de las reglas R.5.(a) y R.6.(b) no debe ser *cualquiera*, sino precisamente aquella que ya haya sido introducida o vaya a serlo por aplicación de las reglas R.6.(a) o R.5.(b), la cual pertenecerá desde luego al universo de discurso de x en R.5.(a) o R.6.(b). Caso de que ninguna sentencia fuese particular, mediante la regla R.5.(a) o R.6.(b) se introduciría una constante individual *cualquiera* mediante su aplicación a alguna sentencia universal; aplicaciones ulteriores de esas mismas reglas en el curso del árbol no introducirían constantes individuales nuevas. Así quedan explicadas las condiciones estipuladas para *a* en las reglas R.5.(a) y R.6.(b).

Puede ocurrir que queden en un árbol varias ramas sin clausurar y (1) que las mismas fórmulas atómicas en ramas diferentes tengan valores de verdad diferentes, o (2) que en ningún átomo ocurra alguno de los predicadores de las sentencias de partida. Según (1) cabe establecer tantos esquemas de interpretación como ramas sin clausurar. Respecto de (2), es obvio que no siempre es preciso conocer una interpretación que satisfaga todo átomo que resulte de analizar una sentencia para tener una interpretación que satisfaga esta sentencia. Así, la interpretación I cuyo dominio D es $\{0\}$ e $I(P) = \emptyset$ satisface $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$ cualquiera que sea la asignación que a Q se haga. Es frecuente que para una rama, como las tratadas en (2), haya en el árbol otra rama en que sí que ocurran todos los predicadores de las sentencias de partida formando parte de átomos; la interpretación indicada por una rama de este último tipo se denominará «completa», frente a la indicada por una rama del primer tipo que se denominará «incompleta». En general preferiremos trabajar con interpretaciones completas, siempre que ello sea posible.

Ejemplo 5: Decídase si $\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$ es independiente de $\{\bigwedge x(Px \rightarrow Qx),\ \bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)\}$.



En este caso han quedado sin clausurar las ramas:

(a) 1-2-3-4-5-6-7-10-14, con átomos: $\neg Ra$, $\neg Pa$

(b) 1-2-3-4-5-6-7-10-15, con átomos: $\neg Ra$, $\neg Pa$, $\neg Qa$

(c) 1-2-3-4-5-6-7-11-16, con átomos: $\neg Ra$, Qa

(d) 1-2-3-4-5-6-8-9-13-18, con átomos: $\neg Ra$, Qa, Pa.

Tanto (b) como (d) son interpretaciones completas. Según (b), podemos proponer como interpretación, I, una tal que $I = \langle D, A \rangle$, $D = \{0\}$, $I(P) = I(Q) = I(R) = \emptyset$. Para esta interpretación:

(1) I sat $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$ sii $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat $Px \rightarrow Qx$ sii no I^{δ}_{x} sat Px o I^{δ}_{x} sat Qx. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D, entonces, por cuanto que $0 \notin \emptyset$, tendremos que no I^{δ}_{x} sat Px para todo $\delta \in D$.

(2) I sat $\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$ sii $\bigcap \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat $Rx \rightarrow \neg Qx$ sii no I^{δ}_{x} sat Rx o no I^{δ}_{x} sat Qx. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D, entonces, por cuanto que $0 \notin \emptyset$, no I^{δ}_{x} sat Qx (o no I^{δ}_{x} sat Rx) para todo $\delta \in D$.

(3) I sat $\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$ sii $\bigcup \delta \in D$: I^{δ}_{x} sat $Rx \wedge \neg Px$ sii I^{δ}_{x} sat Rx y no I^{δ}_{x} sat Px. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D, entonces,

por cuanto que $0 \notin \emptyset$, aun cuando se cumple que no I^{δ}_{x} sat Px, no se cumple que I^{δ}_{x} sat Rx. Por tanto no I sat $\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$. Luego I sat $\neg \bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$.

Según (d) podemos proponer la interpretación siguiente: $I = \langle D, A \rangle$ con $D = \{0\}$, $I(P) = I(Q) = \{0\}$ e $I(R) = \emptyset$. Que esta interpretación satisface $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$ y $\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$ y $\neg \bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$ es simple de demostrar.

Hasta aquí hemos tratado la cuestión de la independencia de una sentencia respecto de un conjunto de sentencias. Tratamiento similar tendrá la cuestión de *cuándo un conjunto de sentencias es independiente*, ya que, si Γ es ese conjunto, diremos que Γ es independiente sii para toda sentencia $\alpha \in \Gamma$: α es independiente de $\Gamma - \{\alpha\}$, i.e. es independiente del subconjunto de Γ cuyos miembros son todas las sentencias de Γ menos α.

§3. Consistencia y árboles lógicos

Sea Γ un conjunto de fórmulas de L. Se dice que: Γ es *contradictorio* en L sii toda fórmula de L es derivable formalmente de Γ; y que: Γ es *consistente* en L sii Γ no es contradictorio en L. Para decidir sintácticamente, pues, si Γ es, o no es, *consistente* en L habría que mostrar alguna fórmula de L que no fuese formalmente derivable de Γ o que no es éste el caso, respectivamente. Un modo más simple de decidir esto mismo nos lo suministra, como en el caso de la independencia, el paso a categorías semánticas.

Se dice que Γ es *satisfacible* sii hay al menos una interpretación de L que satisface toda fórmula en Γ; y un metateorema importante es éste:

Γ es *consistente* sii Γ es *satisfacible*.

Decidir si Γ es *consistente* en L se convierte, así, en hallar al menos una interpretación de L que satisfaga toda fórmula en Γ. Si una interpretación tal no se puede hallar, entonces Γ es contradictorio en L.

Hasta ahora hallar interpretaciones adecuadas al fin acabado de fijar ha dependido de la «intuición» de cómo hacerlo, canalizada por el conocimiento de la doctrina (traskiana) de satisfacción. Las ventajas que se seguirían de poseer un procedimiento mecánico para hallar estas interpretaciones son obvias en cuanto a su importancia.

Un procedimiento mecánico tal puede ser el que a continuación desarrollo. Las reglas R.1.-R.6. nos permitían analizar las sentencias de un conjunto dado hasta llegar a átomos; de las sentencias de tal conjunto, en pruebas de independencia, se suponía cada vez una como falsa y las restantes como verdaderas; las ramas no clausuradas nos indicaban esquemas de interpretación adecuados. Ahora, en primer lugar, al plantearnos cuestiones de conjuntos consistentes — ya no independientes — no hablamos de conjuntos de sentencias, sino de conjuntos de fórmulas en general. Es evidente, sin embargo, que las reglas R.1.-R.6. podrían seguirse usando en este caso con tal que empleásemos S — satisfacible — e In — insatisfacible — en lugar de V o F, respectivamente, o que no empleásemos ningún signo cuando la fórmula fuese satisfacible y $\neg$ cuando fuese insatisfacible (recuérdese que sólo las sentencias, de entre las fórmulas, son verdaderas o falsas). En segundo lugar, frente a la estrategia que nos ha guiado en pruebas de independencia, ya que ahora para probar que Γ es un conjunto consistente en L debemos demostrar que Γ es satisfacible y, por tanto, que hay al menos una interpretación de L que satisface *toda* fórmula en Γ, construiremos árboles guiados por esta otra estrategia: introducir como primeros puntos y *como satisfacibles* todas las fórmulas en Γ; entonces, si al aplicar las reglas R.1.-R.6. — con las modificaciones arriba introducidas — se llega en una misma rama a una misma fórmula atómica satisfacible en un caso e insatisfacible en otro, la rama quedará clausurada. Los átomos en una rama no clausurada nos indicarán un esquema de interpretación del que generar interpretaciones particulares que satisfagan Γ. Si toda rama queda clausurada, ello será imposible y, por tanto, Γ no será satisfacible; luego, Γ será contradictorio.

Ejemplo 6: Decídase si $\Gamma = \{\Lambda x(Px \rightarrow Qx),\ \Lambda x(Rx \rightarrow Px),\ Vx(Rx \wedge Qx)\}$ es consistente.

1 $\Lambda x(Px \rightarrow Qx)$
2 $\Lambda x(Rx \rightarrow Px)$
3 $Vx(Rx \wedge Qx)$
4 $Ra \wedge Qa$
5 $Pa \rightarrow Qa$
6 $Ra \rightarrow Pa$
7 Ra
8 Qa

9 $\neg Pa$ | 10 Qa

11 $\neg Ra$ ⊗ | 12 Pa ⊗ | 13 $\neg Ra$ ⊗ | 14 Pa

Los átomos P*a*, Q*a* y R*a* en la rama no clausurada 1-2-3-4-5-6-7-8-10-14 indican este esquema de interpretación: Ya que sólo ocurre *a* en aquéllos, el dominio de la interpretación contendrá, al menos, un individuo, el asignado a *a*; ya que *a* cumple P, Q y R, el conjunto asignado a cada uno de esos predicadores puede ser el mismo, en particular un conjunto que conste del individuo asignado a *a* como miembro. Así podemos proponer: $I = \langle D, A \rangle$, con $D = \{0\}$, $I(P) = I(Q) = I(R) = \{0\}$. Para esta interpretación Γ es satisfacible; en efecto:

(1) I sat $\Lambda x(Px \rightarrow Qx)$ sii $\bigcap \delta \in D$: I_x^δ sat $Px \rightarrow Qx$ sii no I_x^δ sat Px o I_x^δ sat Qx. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D y $0 \in I(Q) = \{0\}$, entonces: I_x^δ sat Qx para todo $\delta \in D$.

(2) I sat $\Lambda x(Rx \rightarrow Px)$. Esto se prueba similarmente a (1).

(3) I sat $Vx(Rx \wedge Qx)$ sii $\bigcup \delta \in D$: I_x^δ sat $Rx \wedge Qx$ sii I_x^δ sat Rx y I_x^δ sat Qx. Para $\delta = 0$: $0 \in I(R) = \{0\}$ y $0 \in I(Q) = \{0\}$; entonces $\bigcup \delta \in D$: I_x^δ sat Rx y I_x^δ sat Qx.

Ejemplo 7: Decídase si $\Gamma = \{\Lambda x\, Rxx,\ \Lambda x\, \Lambda y(Rxy \rightarrow Ryx),\ \Lambda x\, \Lambda y\, \Lambda z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)\}$ es consistente.

1 $\Lambda x\, Rxx$
2 $\Lambda x\, \Lambda y(Rxy \rightarrow Ryx)$
3 $\Lambda x\, \Lambda y\, \Lambda z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
4 R*aa*
5 R*aa* $\rightarrow$ R*aa*
6 R*aa* $\wedge$ R*aa* $\rightarrow$ R*aa*

7 $\neg$ R*aa* ⊗ | 8 R*aa*

9 $\neg$(R*aa* $\wedge$ R*aa*) | 10 R*aa*

11 $\neg$ R*aa* ⊗ | 12 $\neg$ R*aa* ⊗

En la única rama no clausurada ocurre sólo el átomo R*aa*. Hay sólo una constante individual tal que cumple R consigo misma. Interpretación propuesta: $I = <D, A>$ con $D = \{0\}$, $I(R) = \{<0, 0>\}$ (recuérdese que I sat $Pt_1, \ldots, t_n$ sii $<I(t_1), \ldots, I(t_n)> \in I(P)$).

Ahora:

(1) I sat $\Lambda x\, Rxx$ sii $\cap\, \delta \in D$: I_x^δ sat Rxx. Ya que $\delta = 0$ es el único miembro de D y $<0, 0> \in I(R)$, entonces I sat $\Lambda x\, Rxx$.

(2) I sat $\Lambda x\, \Lambda y(Rxy \rightarrow Ryx)$ sii $\cap\, \delta,\ \Theta \in D$: $I_{xy}^{\delta\theta}$ sat $Rxy \rightarrow Ryx$ sii no $I_{xy}^{\delta\theta}$ sat Rxy o $I_{xy}^{\delta\theta}$ sat Ryx, donde por $I_{xy}^{\delta\theta}$ entendemos la interpretación que difiere de I a lo sumo en las asignaciones hechas a x e y (δ y Θ, respectivamente). Ya que $\delta, \Theta = 0$: $<0, 0> \in I(R)$. Luego: $\cap\, \delta,\ \Theta \in D$: $I_{xy}^{\delta\theta}$ sat Ryx.

(3) I sat $\Lambda x\, \Lambda y\, \Lambda z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$ se prueba de manera similar a (2).