J. Sanmartín
E. Requena
J. B. Climent

CUESTIONES INTUICIONISTAS SOBRE EL METODO DEL «FORZAMIENTO» EN COHEN

Parte I. Conceptos básicos

En la serie de artículos cuya publicación se inicia con el presente, pretendemos:

1. Exponer el método de forzamiento en Cohen-1966.
2. Exponer las pruebas de independencia del Axioma de Constructibilidad, del Axioma de Elección y de la Hipótesis (Generalizada) del Continuo en Cohen-1966; y
3. Analizar críticamente, desde el punto de vista intuicionista, tal método y tales pruebas.

En este primer artículo abordamos la primera de las tareas enumeradas, tarea nada simple dada la radical ambigüedad con que se presentan en Cohen-1966 los conceptos básicos y que explica, en gran parte, junto a su gran complejidad, el éxito del método de modelos de valores booleanos, alternativo del forzamiento, de mucha mayor facilidad de manejo. Esta ambigüedad, que referimos principalmente a las definiciones de familia construible y espacio de rotulación, intenta ser eliminada aquí. No tenemos, sin embargo, garantías plenas de que nuestra intención se haya cumplido.

* * *

Al abordar la cuestión metateórica de la consistencia de un sistema axiomático caben dos posibilidades: 1) exhibir un modelo para el sistema, o 2) demostrar que en tal sistema, si A es una fórmula del mismo, no se da a la vez $\vdash A$ y $\vdash \neg A$. Uno y otro procedimiento se demuestran lógicamente equivalentes entre sí. En la metateoría de los sistemas axiomáticos de conjuntos, cuando se intentan demostraciones de consistencia e independencia, es usual recurrir al primero de los procedimientos citados.

Los intentos de demostración de consistencia se han dirigido principalmente hacia el Axioma de Elección (abreviado en lo sucesivo por AE) y la Hipótesis (Generalizada) del Continuo (abreviada en lo sucesivo por H(G)C), por tratarse el primero de ellos de un axioma que posibilita, *sin la existencia de condiciones críticas,* la aserción de la existencia de conjuntos, y el segundo la asignación de cardinales transfinitos a los conjuntos obtenidos por medio de la operación del conjunto potencia aplicada a conjuntos infinitos. Los resultados obtenidos en estos casos han dependido siempre del supuesto de que la teoría axiomática de conjuntos en cuestión —para facilitar los desarrollos posteriores nos referiremos sólo a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, por supuesto sin el AE y sin la H(G)C, que abreviaremos por ZF— *es consistente,* ya que, en caso contrario, toda fórmula sería deducible en dicha teoría.

Las pruebas de consistencia de AE y de H(G)C han dependido así del supuesto de Consis(ZF) (abreviatura para "ZF es consistente"). Se ha tratado, por lo tanto, de pruebas de *consistencia relativa,* no consistencia absoluta. Y por cuanto que, por el Teorema de Incompletud de Gödel, es imposible probar que Consis(ZF) sea un teorema en ZF, entonces, en último extremo, Consis(ZF) aparece en esta parcela como un "artículo de fe". No hay ninguna garantía de que el sistema ZF no dé lugar a paradojas de tipo diferente a las clásicas. Ello sólo se lograría si, ciertamente, se pudiera demostrar Consis(ZF).

Ha sido Gödel (1938) el primero en dar una prueba de la consistencia (relativa) de AE y HGC, prueba amplia y rigurosamente presentada en Gödel-1940. Sin embargo, *no* podemos decir que en Gödel-1940 se discuta un modelo específico. La idea clave en Gödel es, dado el universo V de ZF, tratar de obtener alguna *subclase,* digamos L, de V tal que, bajo alguna relación, digamos R, L sea un modelo de ZF. A un modelo de este tipo lo denominaremos un "modelo interno".

En Gödel-1940, a partir de V, ya que $On \subseteq V$ —donde On denota la clase de los ordinales—, simplemente se define un concepto de *conjunto constructible* ($x = F\alpha$), asociándose con cada enunciado A de ZF un enunciado A_L en el que la palabra conjunto se reemplaza por "conjunto constructible". Se denomina "enunciado relativizado a L" a todo enunciado A_L. Se define L, a continuación, como la *clase* de los conjuntos constructibles. Ciertamente, L es una clase y no un conjunto (!).

El resultado central, entonces, en la demostración de Gödel-1940 consiste en probar que $V = L$ vale para L. A $V = L$ se le conoce con el nombre de "axioma de constructibilidad" y puede ser enunciado verbalmente de la siguiente manera: "Todo conjunto en ZF es constructible".

El carácter de central que tal prueba posee le viene dado por el hecho de que $V = L \rightarrow AE$ y $V = L \rightarrow HGC$, y, por cuanto $HGC \rightarrow AE$, entonces $V = L \rightarrow HGC \rightarrow AE$.

El programa de Cohen-1963 (1964, 1966) consiste en demostrar que las flechas en $V = L \rightarrow HGC \rightarrow AE$ *no pueden invertirse,* i. e., AE *no* es derivable de ZF, ZF + AE *no* implica HGC, y ZF + HGC *no* implica $V = L$. En otros términos, se trata de probar la independencia de $V = L$, AE y HGC.

Puede pensarse, en principio, en obtener un modelo *interno* en el que $ZF + V \neq L$ (resp. $\neg$ AE, $\neg$ HGC) valga para cumplir el programa de Cohen-1966 (nos basaremos sobre todo en éste y no en Cohen-1963-64) de demostrar la independencia de $V = L$ (AE y HGC). Esto es, podríamos pensar si se puede producir una cierta propiedad A tal que

$$\{ x \mid A(x) \}$$

sea un modelo interno para ZF + V $\neq$ L ($\neg$ AE, $\neg$ HGC). El Teorema 2 que expondremos a continuación (teorema de Shepherdson-1951-52-53) pone de manifiesto que *ello no es posible* (!). El teorema de Shepherdson se maneja con un modelo especial, al que denominaremos "modelo mínimo" —para él reservamos el signo M_o—, *cuya existencia se sigue de la existencia* de un modelo standard de ZF que sea un conjunto. M_o es un conjunto y no una clase (al menos no es una clase propia). Modelo standard tiene aquí el significado usual, i. e., un conjunto, digamos M, tal que si R es $\{ < x, y > \mid x \in y \wedge x \in M \wedge y \in M \}$, entonces M es un modelo (para ZF) bajo la relación R. Pero, dado qne no podemos probar en ZF la existencia de un modelo standard para ZF, ya que ello implicaría tener Consis(ZF), i. e., ZF es consistente, postulamos tal existencia mediante el siguiente axioma:

AXIOMA MS. Existe un modelo standard para ZF.

Definición 1

M es un modelo standard transitivo (para ZF) si y sólo si M es un modelo standard (para ZF) y $\wedge\, x\ (x \in M \longrightarrow x \subseteq M)$.

Antes de pasar a la prueba del citado teorema de Shepherdson introduciremos nociones y un teorema previos. En primer término procederemos a la definición (bastante ambigua en Cohen-1966) de familias de conjuntos constructibles. Por inducción transfinita sobre α definimos las familias de constructibilidad de la siguiente manera:

Definición 2

$$X_o = \emptyset$$

$$X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \{ Z \in \bigcup_{\beta < \alpha + 1} X\beta \mid Ax_\alpha\ (z, t_1, \ldots, t_k) \}$$

$$\text{Para } t_1, \ldots, t_k \in X_\alpha$$

$$M = \bigcup_{\gamma \in On} X\gamma$$

Pasamos ahora a la prueba de un teorema sobre el que se apoya direc tamente el resultado de Shepherdson, y al que conoceremos en lo sucesivo con el nombre de "Teorema del Modelo Mínimo". La demostración de este teorema se apoya, a su vez, en el teorema de Isomorfismo de Mostowski-1949.

Teorema 1. — Si hay un conjunto que es un modelo standard de ZF, entonces hay un único conjunto M_o, tal que M_o es un modelo standard transitivo numerable de ZF y M_o es un submodelo de todo modelo standard transitivo de ZF.

Prueba. — Si hay un conjunto, por ejemplo N, que es un modelo standard de ZF (Axioma MS), entonces, por el Teorema del Isomorfismo debe haber un conjunto, digamos M, que sea un modelo standard transitivo de ZF y al que N sea $\in$ — isomórfico.

Ya que M es transitivo, si $\alpha \in$ M, entonces todo $\beta < \alpha$ pertenecerá asímismo a M. Ya que M *es un conjunto,* no será cierto que $\Lambda\beta \in$ On, $\beta \in$ M (i. e., M no contiene *todos* los ordinales). Por ello, sea $\alpha_1 = \sup \{ \alpha \mid \alpha \in M \}$. Entones si

$$X\alpha_1 \leftrightharpoons \cup \{ M\alpha \mid \alpha < \alpha_1\}$$

$X\alpha_1$ será la familia de conjuntos constructibles relativos a M, de modo que $X\alpha_1 \subseteq$ M. Ya que M es un modelo para ZF, $X\alpha + 1$ será un modelo para ZF.

Sea ahora M cualquier modelo standard transitivo para ZF, y sea $\alpha_1 = \sup \{ \alpha \mid \alpha \in M \}$. La existencia de α_1 implica la existencia de algún ordinal $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ tal que α_2 sea el supremo de todos los ordinales en algún otro modelo standard transitivo, digamos M_o. Si $X\alpha_2 = M_o$, entonces $X\alpha_2 \subseteq X\alpha_1 \subseteq M$. Luego M_o es un modelo standard transitivo para ZF incluido en cualquier otro modelo standard transitivo para ZF.

Para demostrar que M_o es único, supóngase que hay otro conjunto M que coincide con M_o en todas sus características. Entonces:

$$M_o \subseteq M^*, \text{ y } M^* \subseteq M_o$$

Luego

$$M_o = M^*$$

Por tanto, M_o es único.

Para demostrar que M_o es numerable, por el Teorema de Löwenheim-Skolem, M_o debe contener algún submodelo standard numerable. Por el Teorema del Isomorfismo, este submodelo debe ser $\in$ — isomórfico a algún modelo standard transitivo numerable. Pero M_o está incluido en todo modelo standard transitivo. Luego M_o debe ser numerable.

Corolario 1. — V = L vale en M_o.

Prueba. — Obvia, ya que $M_o = \cup \{ X\alpha \mid \alpha < \alpha_2\}$, y cada $X\alpha$ es una familia de conjuntos constructibles.

Corolario 2. — M_o no puede contener ningún submodelo standard transitivo propio.

Prueba. — Obvia, ya que M_o es un submodelo de todo modelo standard transitivo.

Definición 3. — Diremos que M_o es un modelo mínimo si, y sólo si M_o es un conjunto numerable que sea un modelo standard transitivo para ZF + V = L y que sea un submodelo de todo modelo standard transitivo.

TEOREMA 2. — Sea A (x) cualquier fórmula en ZF. No puede probarse en ZF que $\{ x \mid A(x) \}$ sea un modelo de ZF + V $\neq$ L (respectivamente para ZF + $\neg$ AE y ZF + AE + $\neg$ HGC).

Prueba. — Supóngase que se puede producir una tal A (x) para la que se pudiera probar en ZF que $\{ x \mid A(x) \}$ es un modelo para ZF + V $\neq$ L.

Sea M_o el modelo mínimo para ZF; entonces de nuestro supuesto se seguiría que valdría en M_o que

$$\{ x \mid A_{M_o} (x) \}$$

es un modelo para ZF + $V \neq L$. Sea $M^* = \{ x \mid A_{M_o} (x) \}$. Entonces $M^* \subset M_o$, ya que para M_o vale $V = L$ y, en cambio, para M^* vale $V \neq L$. Por el Teorema del Isomorfismo, el submodelo standard M^* de M_o debería ser isomórfico a algún submodelo standard transitivo propio de M_o. Pero por el corolario 2 esto es una contradicción.

Definición 4. — Denominamos "función inicial rank de x", para $x \in N$, a una función de valores ordinales r_1 sobre N tal que $r_1 (x) = \sup \{ r_1 (y) \mid y \in x \}$.

Podemos ahora probar un nuevo resultado de interés grande para nuestros desarrollos posteriores:

TEOREMA 3. — Si ZF + MS es consistente, entonces no existe un modelo standard transitivo no numerable en el que valga AE y contega números reales no constructibles.

Prueba. — Sea M un modelo standard transitivo no numerable tal que AE valga en M. Sea $\alpha_o = \sup \{ \alpha \mid \alpha \in M \}$. α_o ha de existir, ya que M es un conjunto. α_o ha de ser no numerable, puesto que si α_o fuera numerable, entonces se seguiría la contradicción siguiente: Sea $R\beta$ el conjunto de los conjuntos de rank inicial β; puesto que M es no numerable y la unión numerable de conjuntos numerables es, a su vez, numerable, para algún $\beta < \alpha_o$ $R\beta$ ha de ser no numerable. Puesto que rank (inicial) es una noción absoluta, $R\beta$ es definible en M. Pero si $R\beta$ es no numerable, entonces, dado que AE vale en M, $R\beta$ puede ser bien ordenado y por lo mismo le corresponderá un ordinal no numerable, lo que contradice el que α_o sea numerable y sea el supremo de los ordinales en M. Por lo tanto, α_o es no numerable y, en consecuencia, M contiene todos los ordinales numerables. Pero si ZF + MS es consistente, también lo es ZF + MS + $V = L$. Pero si $V = L$, entonces todo número real es constructible a partir de ordinales numerables. Luego, todo número real es constructible en M.

Resumiendo, por el Axioma MS se ha postulado la existencia de un conjunto que es un modelo standard para ZF. Por el Teorema 1 existe entonces un conjunto M_o que es un modelo mínimo para ZF + $V = L$. Por el Teorema 2 el método de modelos internos falla para ZF + $V \neq L$. Por el Teorema 3, a partir de ZF + MS —el supuesto inicial de todos estos desarrollos— *sólo* pueden considerarse modelos standard numerables si se tiene la intención de probar la independencia de HGC. En lo sucesivo, cuando hablemos de modelo estaremos abreviando siempre "modelo standard transitivo".

Al construir nuevos modelos en que ZF + $V \neq L$ (o $\neg$ AE, o $\neg$ HGC), el requisito principal será asegurar que sean *suficientemente "amplios"* como para estar cerrados bajo la construcción de los conjuntos exigidos por los axiomas. Por cuanto que AE y HGC son axiomas sin referencia al tamaño del modelo, *adoptaremos* el principio de que los nuevos modelos que construyamos no contengan ordinal alguno que no esté ya en M_o. Si en lo sucesivo, α_o denota el sup $\{ \alpha \mid \alpha \in M_o \}$, entonces lo acabado de decir significará que, cualquiera que sea el nuevo modelo, digamos N, que obtengamos, será tal que $\alpha_o = \sup \{ \alpha \mid \alpha \in N \}$.

La intención de construir un N tal que para él valga ZF + V $\neq$ L se podrá cumplir entonces, si y sólo si puede obtenerse algún conjunto, digamos *a*, tal que $a \in N$ y *a* no sea constructible. Claramente entonces $r_1(a) < \alpha_o$ y, además, ya que *a* no es constructible, $a \notin M_o$, ya que para M_o vale V $\neq$ L.

Propongamos, por ser la posibilidad más simple —ya que la noción de entero es absoluta— que $a \subseteq \omega$. Ya que M_o es numerable, hay entonces una infinita posibilidad de tomar conjuntos en ω que no estén en M_o. Pero *no todo* arbitrario *a* será tal que N sea un modelo para ZF + V $\neq$ L. En particular, el ordinal (numerable) α_o corresponde a una buena ordenación de ω y, por lo tanto, a un subconjunto de $\omega \times \omega$ y, en consecuencia, a un subconjunto de ω, digamos *x*. Si $a = x$, entonces, como $a \in N$, $\alpha_o \in N$; pero, ya que $r_1(a) < \alpha_o$, $\alpha_o \in N$, para todo $a \in N$.

En consecuencia, *a* deberá tener ciertas propiedades especiales si N ha de ser un modelo para ZF + V $\neq$ L. Podemos, entonces, intentar un examen de las diversas propiedades que *a pueda tener* y decidir cuáles *deba tener*. Ello no implica otra cosa que decidir qué enunciados A sobre *a* han de valer. No está claro, en este punto, qué regla deba usarse para llevar a efecto esta tarea, pero, al menos, está claro que algunas decisiones serán más fáciles que otras. Por una parte, por ejemplo, para casos como el anterior de que α_o corresponda a una buena ordenación de ω, la decisión será muy simple. Habrá, por otra parte, propiedades básicas que valgan para un $a \subseteq \omega$ determinado y no para otro. Se trata de propiedades como $n \in a$ o $n \notin a$. De hecho estas propiedades constituyen las mínimas unidades de información que sobre un *a* pueden darse y en base a las mismas se pueden determinar como verdaderas propiedades más complejas. Así, por ejemplo, en base a que $2 \in a$ y $3 \notin a$ se determinan como verdaderos sobre *a* los enunciados $\vee x\, (x \in a)$, $2 \in a \vee x$, $a \neq \{ 3 \}$, ...

Denominaremos (de momento, de manera informal hasta su introducción formal en la segunda parte de este artículo) "condición de forzamiento" a un conjunto autoconsistente de enunciados de la forma $n \in a \vee n \notin a$. Por lo acabado de decir, en base a un conjunto de este tipo podrán determinarse (o no) como verdaderos sobre *a* ciertos enunciados. "Determinar (o no) como verdadero" se interpretará en lo sucesivo como "forzar (o no) a valer".

Pero la intención de Cohen-1966 es que el a que obtengamos, tal que $a \subseteq \omega$ y $a \in$ N y $a \notin M_o$, sea tal que se comporte como un (sub) *conjunto genérico* de ω, no como un conjunto cualquiera dado de enteros. Por ello a sólo podrá estar determinado cuando para todo k $\in$ n, n $\subseteq \omega$, pueda demostrarse la existencia de una condición de forzamiento que fuerce k $\in a$ o k $\notin a$. Así, a nos aparecerá determinado como el conjunto de todos los k $\in$ n tales que k $\in a$ sea forzado por alguna condición de forzamiento.

Ello nos explica el hecho de que, aunque puedan correlatarse forzamiento e implicación, el primero diferirá de la segunda en que, dado que P fuerce A, no será verdad que *cualquier* a que satisfaga P, satisfaga asimismo A. Lo que será verdad es que si a es *genérico,* entonces si a satisface P, satisface asimismo A.

La tarea a realizar será, pues, en principio, examinar los enunciados posibles sobre el a genérico para decidir cuáles de ellos valdrán o no. Ello nos lleva, a su vez, a examinar el modelo N. En efecto, la obtención del modelo N puede efectuarse de la manera siguiente: Dada la suposición inicial de que α_o sea el supremo de los ordinales en N, entonces todo conjunto en N será tal que su r_1 sea menor que α_o. Para la obtención de los conjuntos de N utilizaremos entonces familias de constructibilidad a partir de a más a mismo— definidas de la manera siguiente:

Definición 5

$$M0\ (a) = \omega \cup \{a\}$$

$$M\alpha\ (a) = \bigcup_{\beta<\alpha} M\beta\ (a) \cup \{ y \mid y = \{ x \in X\alpha \mid A\ (x) \}\}$$

$$M\alpha\ (a) = \bigcup_{\beta<\alpha} M\beta\ (a) \text{ para } \alpha \text{ límite;}$$

donde $X\alpha \rightleftharpoons M\beta\ (a)$ y las fórmulas A (x) son fórmulas de ZF con todas sus variables limitadas a $X\alpha$ y que pueden contener constantes pertenecientes a $X\alpha$. Podemos definir entonces:

Definición 6

$$N \rightleftharpoons \bigcup_{\alpha<\alpha_o} M\alpha\ (a)$$

Así, por la definición de N, examinar los enunciados posibles sobre a (genérico) para decidir cuáles de ellos valdrán o no, no será otra cosa que examinar parte de los enunciados sobre N.

El primer objetivo que nos planteamos, ya que los conjuntos en $M\alpha\ (a)$

que no están en $M\beta$ (a), $\beta<\alpha$ están, según la definición 5, definidos por *fórmulas*

$$\{ x \in X\alpha \mid A (x) \}$$

será contar con alguna enumeración de tales fórmulas. Una manera de hacerlo eran las $F\alpha$ del Gödel-1940. Otra, el procedimiento de *rotulación* practicado por Cohen-1966.

Definición 7

Una *rotulación* es una aplicación definida en ZF tal que a cada ordinal $0 < \alpha < \alpha_0$ le asigna:

1. Un conjunto, denominado "espacio de rotulación", definido de la manera siguiente:

$$S_0 = \omega \cup \{a\}$$
$$S\alpha = \{ y \mid y = \{ x \in X\alpha \mid A (x) \}\}, \text{ para } \alpha \text{ ordinal sucesor}$$
$$S = \cup_\alpha S\alpha$$

2. Funciones $\zeta\alpha$ tales que a cada $c \in S\alpha$ asignen una fórmula A (x) que cumpla las restricciones de la fórmula utilizada en la definición 5.

Respecto de esta definición conviene hacer algunas observaciones. En primer lugar, es claro que las funciones $\zeta\alpha$ pondrán en correspondencia biunívoca los $S\alpha$ con el conjunto de las A (x). En segundo lugar, para $\alpha = \beta+1$, $S\alpha$ será el conjunto que, unido a $M\beta$ (a) genere $M\alpha$ (a). Al menos, lo acabado de decir es lo que nosotros creemos que se adecúa a los desarrollos posteriores de Cohen-1966. Lamentablemente, la ambigüedad de la definición original de Cohen-1966 correspondiente a nuestra definición 7 es total. En conexión con tal definición original pueden surgir problemas graves. Por una parte, Cohen exige que los $S\alpha$ sean *disjuntos* e incluso recalca que cada $c \in N$ está en un único $S\alpha$. ¿No podría darse el caso de que existan dos fórmulas equivalentes tanto con sus variables restringidas a un mismo α, o incluso a α y β distintos, tales que, extensionalmente, den lugar al mismo conjunto? Si lo primero, entonces sería cuestionable el carácter biunívoco de las funciones $\zeta\alpha$; si lo segundo, los $S\alpha$ no serían disjuntos, como Cohen-1966 dice. Por tanto, ¿cuál es la noción de conjunto que Cohen-1966 está sustentando en este instante? En nuestra opinión, Cohen-1966 no se está moviendo en este punto en una perspectiva extensional; es más, hay aquí fuertes resonancias intensionales. Dos puntos apoyan esta conclusión: la posibilidad de definir los $S\alpha$ como componiéndose de las fórmulas A (x) mismas, y la definición de forzamiento de Cohen-1966, donde se admite que dos conjuntos que extensionalmente son iguales pueden pertenecer a $S\alpha$ y $S\beta$ distintos. Entonces, es plausible que Cohen esté abandonando, en conexión con los $S\alpha$, la perspectiva extensional, limitándose a la mera afirmación de que cada fórmula diferente da lugar a un conjunto diferente, obviando la eliminación de las reduplicaciones de conjuntos extensionalmente iguales.

BIBLIOGRAFIA

P. J. COHEN. "Independence of the Axiom of Choice". Stanford Univ., 1963.

——— "The Independence of the Continuum Hypothesis", I, II. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 50 (1963), págs. 1.143-1.148; 51 (1964), págs. 105-110.

——— "Independence results in set theory". En *Studies in Logic and the Foundations of mathematics.* North-Holland Publ. Co., 1965, págs. 39-54.

——— *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* A. Benjamin, N. Y., 1966.

K. GÖDEL. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Princeton, 1940.

J. C. SHEPHERDSON. "Inner Models for set theory", I, *JSL* 16 (1951), págs. 161-190; II, *JSL* 17 (1952), págs. 225-237; III, *JSL* 18 (1953), págs. 145-167.

G. TAKEUTI y W. M. ZARING. *Introduction to axiomatic set theory.* Springer Vg., N. Y., 1971.