J. F. Cogollos Santamans

H-SEMIGRUPOS ABELIANOS

La teoría de semigrupos topológicos tuvo su inicio en el año 1928 con una publicación de Suschkewitsch que estudió la estructura de los semigrupos finitos simples; a partir de entonces con los trabajos de Wallance, Schwartz, Koch, Kimura, etc. que por primera vez se dieron cuenta de la existencia de subgrupos maximales, se dio un gran avance en el estudio de la teoría de semigrupos.

La estructura topológica de un semigrupo es muy importante, esto se puso en evidencia cuando Ellis demostró que un semigrupo topológico localmente compacto con estructura de grupo es un grupo topológico, resultado generalizado por Mostert.

Con esta base se empezó a estudiar la estructura de todo tipo de semigrupos topológicos. La dificultad estriba en que cualquier espacio topológico localmente compacto puede ser convertido en semigrupo topológico definiendo una multiplicación convenientemente. Por eso hasta ahora sólo algunos tipos especiales de semigrupos han sido estudiados satisfactoriamente, como por ejemplo los semigrupo compactos, los totalmente ordenados, etc.

Freudental estudió los grupos localmente compactos separables que podían ser compactificados añadiendo dos puntos de acumulación, y demostró que esos grupos eran producto del grupo de los números reales y de un grupo compacto.

Si en estos grupos estudiados por Freudental se hace de uno de los puntos un cero, tendremos un semigrupo cuyo complemento es compacto (un punto).

Hoffmann generalizó los resultados de Freudental y estudió los semigrupos topológicos que contenían un grupo maximal denso cuyo complemento es un conjunto compacto y los clasificó completamente.

En este trabajo se da una nueva prueba, muy sencilla, del teorema de estructura de los semigrupos topológicos abelianos de este tipo.

He procurado en la demostración, usar un mínimo de conocimientos de la teoría de semigrupos topológicos, muchos de los resultados son de un trabajo que realicé en la Universidad de Amsterdam con la profesora Dra. Paalman de Miranda.

Castellón, mayo 1977.

Un Semigrupo Topológico es un conjunto S, junto con una función continua $(\cdot)\ S \times S \to S$ tal que:

— S es un espacio de Hausdorff

— $(.)$ es asociativa

Un *Subsemigrupo* de S es un conjunto no vacío $J \subset S$ tal que $J^2 \subset J$.

Un conjunto no vacío G es un *subgrupo* de S si es subgrupo algebraico de S i.e $g\,G = G\,g = G$ para todo $g \in G$ (un subgrupo de S no es necesariamente un grupo topológico).

Ejemplos:

a) El intervalo cerrado $[0, 1]$ con multiplicación y topología usuales

b) $[0, \frac{1}{2}[$ es un subsemigrupo del anterior

c) $\{0\}$ y $\{1\}$ son subgrupos.

Diremos que un semigrupo topológico S es un *D-Semigrupo* si S es localmente compacto y contiene un subgrupo maximal denso (de ahora en adelante notaremos por G al subgrupo maximal denso de S).

Nota: La identidad (elemento neutro) de G es la identidad de S: Si $x \in S$ como $\bar{G} = S$ existirá una red $\{x_i\}_{i \in I}$ tal que $x = \lim_{i \in I} x_i = \lim_{i \in I} (x_i\, e) = (\lim_{i \in I} x_i)\, e = x\, e = e\, x$. (por la continuidad de la multiplicación).

—De ahora en adelante llamaremos 1 a la identidad de G.

Diremos que un D-semigrupo es un *H-semigrupo* si $B = S - G$ es un subconjunto compacto de S.

Ejemplos:

a) El conjunto de los números reales no negativos con multiplicación y topología ordinaria. (es isomorfo a $(R, +)$ junto con el infinito).

b) $\{(\frac{1}{2})^n\}_{n \in Z} \cup \{0\}$ con multiplicación y topología ordinarias.

Llamaremos R y Z al grupo $(+)$ de los reales y de los enteros respectivamente.

Lema I [1] Si S es un H-semigrupo tanto G como B son grupos topológicos.

Prueba: a) Veamos que G es grupo topológico:

Como B es compacto $G = S - B$ es abierto y como un subconjunto abierto de un espacio localmente compacto es localmente compacto, G es loc. compacto, y por un Teorema de Ellis [2] sabemos que todo semigrupo topológico localmente compacto con estructura de grupo es un grupo topológico.

b) Como B es compacto por el teorema de Ellis sólo habrá que que demostrar que B tiene estructura de grupo.

b_1) $G \,.\, B \subset B$ y $B \,.\, G \subset B$.

Si no fuera así existirían $g_1, g_2 \in G$ y $b \in B$ tales que $g_1\, b = g_2$ pero entonces $b = g_1^{-1}\, g_2 \in G$.

b_2) $S \,.\, B \subset B$.

Sea $s \in S$, $b \in B$; $s = \lim\limits_{i \in I} g_i$ para ciertos $g_i \in G$ pues G es denso considero la red $\{ g_i\, b \}_{i \in I}$, como estos son elementos de B y B es comp. existen $I' \subset I$ y $b_1 \in B$ tales que:

$$\lim_{i \in I'} (g_i\, b) = b_1 \in B \text{ y } s.b = b_1 \in B.$$

b_3) Por lo anterior sabemos que la multiplicación es cerrada; faltará ver que todo elemento de B tiene inverso.

Sean $a, b, \in B$; existe un conjunto de índices I tal que

$b = \lim\limits_{i \in I} g_i$ con $g_i \in G$.

Como $a\, g_i^{-1} \in B$ para todo $i \in I$ y B es compacto existe $I' \subset I$ tal que existe el límite $\lim\limits_{i \in I'} a\, g_i = x \in B$, luego la ecuación $a\, x = b$ tiene solución, y por teoría de grupos sabemos que B tiene estructura de grupo.

Si B es un ideal de un semigrupo ($B\, S \subset B$ y $S\, B \subset B$) el *Cociente de Rees* S/B es el conjunto S-B junto con un elemento "z" y multiplicación definida por:

$$a.b = a\, b \qquad \text{si } a,b,a\, b \in S\text{-}B$$
$$a.b = z \qquad \text{si } a\, b \in B \text{ o } a = z \text{ o } b = b.$$

Es fácil ver que si B es un ideal compacto de S, S/B tiene estructura de semigrupo topológico, dándole a S-B la topología cociente resultante de identificar todos los puntos de B con el punto z.

Lema II

Sea S un H-semigrupo, y A un entorno de B ($A \supset B$ y A abierto) entonces existe un subsemigrupo abierto de S, J, tal que $\bar{J}$ es compacto y $J \supset B$ y $\bar{J} \subset A$.

Prueba:

Consideremos el cociente de Rees J/B, por ser localmente compacto existe un conjunto abierto $U \subset J/B$ con $\overline{U}$ compacto y $U \subset A/B$ ($A/B = (A-B) \cup \{z\}$), por continuidad para todo $g \in \overline{U}$ existen entornos V_g de g y W_g de z tales que $V_g\, W_g \subset U$; $\{V_g : g \in \overline{U}\}$ es un cubrimiento de $\overline{U}$ y éste es compacto, luego existen $g_1 \ldots\ldots g_n \in U$ tales que:

$\bigcup_{1}^{n} V_{g_i} \supset \overline{U}$ tomemos ahora $W = \bigcap_{1}^{n} W_{g_i}$ tenemos que:
$W\, U \subset U$ y $W \subset U$, luego $W^2 = W\, W \subset U$ y $W^3 = W^2\, W \subset U$ etc.

Sea $\bigcup_{1}^{\infty} W^n$ y llamemos a este conjunto de S/B, J/B.

— J/B es evidentemente abierto.

— J/B es un subsemigrupo de S/B, pues si $x,y \in J/B$ existen $n,m \in Z$ tales que $x \in W^n$, $y \in W^m$ y entonces $x.y \in W^{n+m} \subset J/B$.

Considerando ahora $J = (J/B - \{z\}) \cup B$, J es evidentemente subgrupo de S que cumple las condiciones del lema.

Aceptaremos sin demostración los siguientes hechos conocidos:

Si $\Gamma(g) = \overline{\{g, g^2, g^3, \ldots\}}$

a) Sea G un grupo topológico, $\Gamma(g) \subset G$ o es compacto o es discreto [3].

b) Sea S un semigrupo topológico, si $\Gamma(g)$ es compacto entonces conitene a un idempotente. (i.e. $x\, x = x$) [4], [6].

Teorema I

Sea S un H-semigrupo; si $\alpha(S) = S \cup \{w\}$ es la compactificación con un punto de S con la Topología de Alexandrof y definimos en S^* una multiplicación: $S^* = \alpha(S) - B$

$$\begin{array}{lll} g{\cdot}g' = g\, g' & \text{si } g \text{ y } g' \text{ pertenecen a } G \\ x{\cdot}y = w & \text{si } x = w \text{ o } y = w. \end{array}$$

En estas condiciones S^* tiene estructura de H-semigrupo.

Observación: De ahora en adelante llamaremos z al elemento neutro de B.

Demostración.

— S^* es evidentemente un semigrupo algebráico.

— S^* es localmente compacto, pues S es abierto en α (S) que es un conjunto compacto de Hausford.

— Faltará, para demostrar que S^* es un H-semigrupo, demostrar que la multiplicación es continua, pues evidentemente, G es un subgrupo denso de S^*.

Si g y g' pertenecen a G la multiplicación es claramente continua.

Si no es el caso, tendremos que demostrar que la multiplicación es continua en (g,w), $g \in G$; en (w,g), $g \in G$ y en (w,w).

Demostraremos el último caso.

Sea $\varepsilon(w)$ un entorno de w, lo tomaremos de la forma $S\text{-}K$ con K compacto, $K \subset S$, $K \supset B$.

— $K\text{-}B$ es un conjunto cerrado de G pues cualquier ultrafiltro contenido en $K\text{-}B$ converge en S a un punto de K luego no converge en G a un punto de $G\text{-}(K\text{-}B)$.

— $(K\text{-}B)^{-1} = \{ g \in G \,/\, g^{-1} \in K\text{-}B \}$ es cerrado en G por ser G un grupo topológico (continuidad).

— $(K\text{-}B)^{-1}$ es cerrado en S:

Supongamos que no sea cierto, sea $\{a_i^{-1}\}_{i \in I}$ $a_i \in K\text{-}B$ una red con un conjunto de índices I y tal que $\lim\limits_{i \in I} a_i^{-1} = b \in B$ y $b \in \overline{(K\text{-}B)^{-1}}$.

Como por ser K compacto en G existe una subred de la anterior $\{a_i\}_{i \in I' \subset I}$ que converge a un punto $s \in K \subset S$.

Si $s \in G$:

$$\lim_{i \in I'} a_i = s \text{ y como por continuidad en } G,$$

$$\lim_{i \in I'} a_i^{-1} = s^{-1} \text{ y } s^{-1} \in B$$

resulta que $\lim\limits_{i \in I} a_i^{-1} \notin B$.

Y si $s \in B$ por continuidad,

$$1 = \lim_{i \in I'} a_i a_i^{-1} = \lim_{i \in I'} a_i \lim_{i \in I'} a_i^{-1} = b\, s \in B.$$

Y en ambos casos tenemos una contradicción

— $S\text{-}(K\text{-}B)^{-1}$ es abierto en S y $B \subset S\text{-}(K\text{-}B)^{-1}$ por lo visto anteriormente.

— En estas condiciones aplicando el Lema II al entorno de B, $A = (S - (K\text{-}B)^{-1}) - \{1\}$ existe un subsemigrupo abierto J tal que:

i) $B \subset J \subset (S - (K\text{-}B)^{-1}) - \{1\}$

ii) $\bar{J}$ es compacto y $1 \notin \bar{J}$.

Sea $J_0 = J - B$, J_0 es un subconjunto abierto de G, luego por continuidad J_0^{-1} es abierto en G, y como $G \subset S$, J_0^{-1} es abierto en S.

— Sea ahora $V = J_0^{-1} \cup \{w\}$, vamos a demostrar:

a) V es un entorno de w

b) $V^2 \subset \alpha(S) - K$

a) V es un entorno de w.

Como $\alpha(S) - V = S - J_0^{-1}$ es un conjunto cerrado de S, es cerrado en $\alpha(S)$ ó w es un punto de acumulación de $\alpha(S) - V$ si esto fuera así, existiría una red:

$\{a_i\}_{i \in I}$, $a_i \in S - J_0^{-1}$, $a_i \notin \bar{J}$ tal que $\lim\limits_{i \in I} a_i = w$, como $\alpha(S)$ es compacto, existe $d \in \alpha(S)$ tal que:

$d \in \overline{\{a_i^{-1}\}_{i \in I}}$.

Como $a_i \notin J_0^{-1}$, $a_i^{-1} \notin J$ luego $d \notin B$, si $d \in G$ sé que $d^{-1} \in G$ y por continuidad d^{-1} sería un punto de acumulación de la red $\{a_i\}_{i \in I}$ pero esto es imposible pues

$\lim\limits_{i \in I} a_i = w$.

Luego $d = w$.

Tomando subrredes podemos suponer que existe una red $\{a_i\}_{i \in I'}$ tal que:

$\lim\limits_{i \in I} a_i = \lim\limits_{i \in I} a_i^{-1} = w$, pero esto es imposible pues si $g \in G$, $g \in J_0$ construyo $\Gamma(g) = \overline{\{g, g^2, g^3, \ldots\}}$, como $\Gamma(g) \subset \bar{J}$ por ser J un subsemigrupo $\Gamma(g)$ es compacto y debe contener un idempotente, luego:

$z \in \Gamma(g)$ y $\lim\limits_{n \to \infty} g^n = z$ (el neutro de B).

Para todo $i \in I$, sean m_i, n_i los mínimos enteros tales que

$a_i g^{m_i} \in \bar{J}$ y $g^{n_i} a_i^{-1} \in \bar{J}$ entonces

$a_i g^{m_i} \in \bar{J} - J g$ y $g^{n_i} a_i \in \bar{J} - g J$.

Veamos que no existe una subred $\{m_i\}_{i \in I' \subset I}$ tal que está acotada; si existiera habría una subrred de la anterior tal que $\{m_i\}_{i \in I'' \subset I' \subset I}$ y $m_i = m$ para todo $i \in I''$, luego $\{a_i g^m\}_{i \in I''}$ tiene un punto de acumulación, sea x, ya que $\bar{J} - J g$ es compacto, pero esto implica que $x\,g^{-m}$ es un punto de acumulación de $\{ a_i\, g^{m_i} g^{-m} \}_{i \in I''} = \{ a_i \}_{i \in I''}$ y esto es una contradicción.

De forma similar podríamos demostrar que no existe ninguna subrred de $\{ n_i \}_{i \in I}$ que esté acotada.

Como $\overline{J} - J\,g$ y $\overline{J} - g\,J$ son subconjuntos compactos de S, $(\overline{J} - g\,J \times \overline{J} - J\,g)$ es un subconjunto compacto de $S \times S$ luego existe un punto $(a, b) \in S \times S$ y una subrred tal que:

$\{ g^{n_i}\, a_i^{-1},\ a_i\, g^{m_i} \}_{i \in I'''}$ y

$\lim_{i \in I'''} (g^{n_i}\, a_i^{-1},\ a_i\, g^{m_i}) = (a,b)$ pero como

$(a,b) \in (\overline{J} - g\,J \times \overline{J} - J\,g)$ esto nos lleva a una contradicción pues

$$\lim_{i \in I} g^{n_i} . g^{m_i} = \lim_{i \in I} g^{n_i + m_i} = z \in B \text{ y}$$

$$\lim_{i \in I} g^{n_i + m_i} = \lim_{i \in I} g^{n_i}\, a_i^{-1} . \lim_{i \in I} a_i\, g^{m_i} = a\,b \notin B \text{ porque}$$

$$B \cap (J - g\,J) = \phi \text{ y } B \cap (J - J\,g) = \phi .$$

Luego $\alpha(S) - V$ es cerrado en $\alpha(S)$ y como $\alpha(S)$ es compacto y de Hausdorf $\alpha(S) - V$ es compacto, luego V es un entorno de w.

b) Veamos ahora que $V . V \subset \alpha(S) - K$.

Si $v_1, v_2 \in V$; $v_1, v_2 \neq w$ tenemos que $v_1 . v_2 \in J_o^{-1}$ pues: $v_1^{-1}, v_2^{-1} \in J_o$ y $v_2^{-1} . v_1^{-1} = (v_1 . v_2)^{-1} \in J_o$.

Si v_1 ó v_2 son w, $v_1\, v_2 = w \in V$.

Y el teorema está demostrado.

Lema III [1]

Si S es un H-semigrupo y;

$S_o = \{ s \in S \,/\, w \in \Gamma(s) \}$

$S_1 = \{ g \in G \,/\, \Gamma(g)$ es compacto y $\Gamma(g) \subset G \}$

$S_2 = \{ g \in G \,/\, \Gamma(g) \subset G$ y $\Gamma(g)$ es discreto $\}$

entonces:

$S_o \cup S_1$ es compacto

$S_2 \cup S_1 \cup \{ w \}$ es compacto

S_1 es compacto

S_o es abierto en S

$S_2 \cup \{ w \}$ es abierto en S^*.

Prueba:

Por ser B compacto $S_0 \cup S_1 = \{ s \in S \,/\, \Gamma(s)$ es compacto$\}$ probaremos que $S_0 \cup S_1$ es compacto viendo que es cerrado en $\alpha(S)$ ya que $\alpha(S)$ es compacto.

Sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una red en $S_0 \cup S_1$ convergiendo a
$b \in \alpha(S) - (S_0 \cup S_1) = S_2 \cup \{w\}$.

Consideremos las redes:

$$\{a_i \,/\, i \in I\} \longrightarrow b$$
$$\{a_i^2 / \, i \in I\} \longrightarrow b^2$$
$$\{a_i^3 / \, i \in I\} \longrightarrow b^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Por continuidad esas redes convergen a
$b, b^2, b^3, \dots\dots\dots\dots$

Como $b \in S_2$ esto implica que $w \in \Gamma(b)$, luego sea J^* un subsemigrupo de S^* tal que es abierto, $1 \notin J^*$ y $w \in J^*$ (que sabemos existe por Teorema I y Lema II), luego existe un $n \in Z$ tal que $b^n \in J$, como J es abierto existe $j \in I$ tal que $a_j^n \in J$, y tomando $\bar{J}$ compacto, se deduce que $w \in \Gamma(a_j^n)$ (recordar que $\Gamma(a_j^n)$ debe contener a un idempotente en estas condiciones).

Como $\Gamma(a_j) \supset \Gamma(a_j^n)$ esto implica que $w \in \Gamma(a_j)$, pero esto es absurdo pues $\Gamma(a_j)$ es compacto en S luego lo es en $\alpha(S)$.

De forma similar, usando el Teorema I, podríamos demostrar que $S_0 \cup S_1 \cup \{w\}$ es compacto.

De los dos apartados anteriores se deduce que S_0 es abierto en S, que $S_2 \cup \{w\}$ es abierto en S^*, y que el conjunto S_1 es compacto.

Lema IV (estructura de G)

Sea S un H-semigrupo abeliano, sea G el subgrupo denso maximal de S:

Entonces G es isomorfo a $R \times C$ o a $Z \times C$, siendo C un grupo compacto, R el grupo de los números reales y Z el grupo de los números enteros (ambos con la ley de composición $+$).

Prueba:

Veamos que G es compactamente generado.

Sea J un subsemigrupo abierto de S con clausura compacta tal que $J \supset B$.

Sea $g \in J$, $g \in G$ con $\lim_{n \to \infty} g^n = z$ (neutro de B)

hemos visto que: $\lim_{n \to \infty} g^n = w$ en $\alpha(S)$, luego para todo $a \in G$ existe un $n \in N$ tal que $g^n . a \in J$.

Sea n_0 el mínimo número natural tal que $g^n a \in J$ para todo $n \geqslant n_0$.

De $g^{n_0} a \in \overline{J} - J g$ (n_0 es mínimo)

se deduce que $a \in (\overline{J} - J g) g^{-n_0}$ y como

$\overline{J} - J g$ es compacto

$$G = \bigsqcup_{n \in Z} (\overline{J} - J g) g^n .$$

Luego el grupo maximal denso G es localmente compacto y es compactamente generado, en esas condiciones podemos aplicar el toerema de estructura de grupos abelianos [5 , p389]

luego $G \simeq R^n \times Z^m \times C$.

En donde R es el grupo aditivo de los números reales, Z el grupo aditivo de los números enteros y C un grupo compacto.

a) Sea $e \in C$ el neutro de C y e' el de Z^m, sea $G' = R^n \times \{e'\} \times \{e\}$, claramente la clausura en S de G' es un H-semigrupo.

Podemos suponer pues (tomado el cociente de Rees) que $R^n \cup \{z\}$ es un H-semigrupo.

Veamos que en estas condiciones $n = 1$:

$R^n = (S_0 - \{z\}) \cup S_1 \cup S_2$ y $S_1 = (0,0,0,\ldots,0)$

por el lema sabemos que $S_0 - \{z\}$ y S_2 son subconjuntos abiertos de R^n pero esto implica que :

$R^n - (0,0, \ldots\ldots\ldots, 0)$ no sería conexo, pero esto sólo es posible si $n \leqslant 1$.

b) Si e'' es el neutro de R^n y e el de C, $G'' = \{e''\} \times Z^m \times \{e\}$ es un subgrupo de G y su clausura en S es un H-semigrupo, como antes podemos suponer que:

$Z^m \cup \{z\}$ es un H-semigrupo.

Si $m \geqslant 2$ y; $z \in \Gamma\,(1,0,0,\ldots\ldots\ldots,0)$

$z \in \Gamma\,(0,1,0,\ldots\ldots\ldots,0)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$z \in \Gamma\,(0,0,0,\ldots\ldots\ldots,1)$

en $\alpha(Z \cup \{z\})$ $\quad w \in \Gamma(-1,0,0,\ldots\ldots,0)$

$w \in \Gamma(0,-1,0,\ldots\ldots,0)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$w \in \Gamma(0,0,0,\ldots\ldots,-1)$

Entonces como si :

$$z \in \Gamma(1,-1,0,\ldots\ldots,0) \qquad \text{y}$$

A es un entorno de z, el conjunto

$$A' = \{x \in Z^m \,/\, x = (a,b,c,\ldots,d) \text{ y } (-b,-a,c,\ldots\ldots,d) \in A\} \cup \{w\}$$

es un entorno de w, se deduce que:

$w \in \Gamma(1,-1,0,0,\ldots\ldots,0)$ y esto es una contradicción. Luego $m \leqslant 1$.

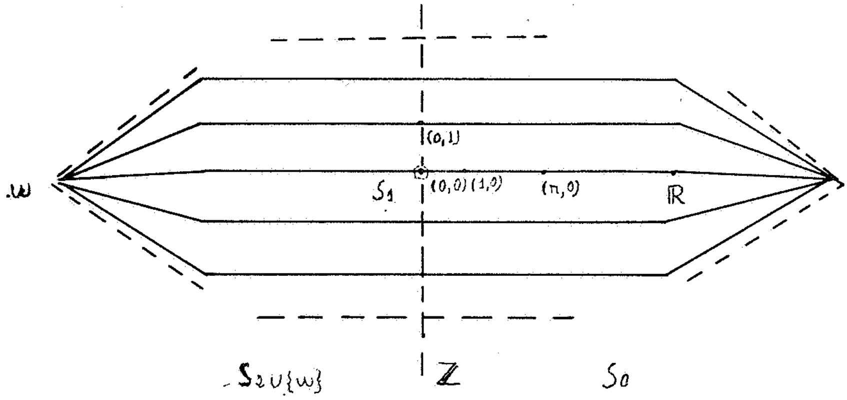
c) De lo visto anteriormente se deduce que

$$G \simeq R^n \times Z^m \times C \qquad n \leqslant 1 \text{ y } m \leqslant 1$$

y por el mismo razonamiento que antes se tiene; que si $n = 1$, $m = 1$ $R \times Z \times \{e\}$ es un subgrupo de G y su clausura en S será un H-semigrupo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(R \times Z \times \{e\}) \cup \{z\} = S$ y que su compactificación es $\alpha(S) = (R \times Z \times e) \cup \{z\} \cup \{w\}$, este es un espacio conexo y $\alpha(S) - S_1 = \alpha(S) - (e'', e', e)$ también es conexo, como S_o y $S_2 \cup \{w\}$ son conjuntos abiertos y cerrados en $\alpha(S) - S_1$, ya que son abiertos por el Lema II y cerrados porque como $S_2 \cup \{w\}$ es abierto en $\alpha(S)$, su complementario es cerrado en $\alpha(S)$ y $S_0 = (\alpha(S) - (S_2 \cup \{w\})) - S_1$ es cerrado en $\alpha(S) - S_1$.

Luego $\alpha(S) - S_1$ no sería conexo y esto es una contradicción. (Ver figura explicativa de la demostración).

Para no tener esta contradicción tendrá que ser $n = 0$ ó $m = 0$ luego $G \simeq R \times C$ ó $G \simeq R \times C$, y esto finaliza la demostración del lema.



Lema V: Estructura de B [1]

Si S es un H-semigrupo abeliano, entonces B es el producto de dos subgrupos de $B = A \, . \, N$ en donde:

A) — Si 1 y z pertenece a la misma componente conexa A es un subgrupo solenoidal compacto de B y $A \simeq \overline{R} \cap B$.

— Si 1 y z no pertenecen a la misma componente conexa A es un subgrupo monógeno compacto de B y como antes $A \simeq \overline{Z} \cap B$.

B) Si $\phi : \begin{array}{l} C \longrightarrow B \\ c \longrightarrow zc \end{array}$, ϕ es un hemomorfismo y N es isomorfo a $C/\ker \phi$.

Prueba:

A) Si z es el elemento neutro de B, por el lema anterior sabemos que $G \simeq M \times C$ en donde $M \simeq R$ o $M \simeq Z$ y como por Lema I, B es un ideal, podemos escribir:

$z \, . \, G = (z \, M) \, . \, (z \, C) \subset B$ pues consideramos M y C como subgrupos de G, $G = M \, . \, C$.

Por ser G denso en S, z G es denso en B, pues si $b \in B$ y $b = \lim\limits_{i \in I} g_i$, $g_i \in G \Rightarrow \lim\limits_{i \in I} (z \, g_i) = b$ y $z \, g_i \in z \, G$ luego $\overline{z \, G} = B$, y por continuidad podemos escribir:

$$\overline{z \, G} = \overline{(z \, M) \, (Z \, C)} = \overline{z \, M} \, \overline{z \, C} = \overline{z \, M} \, (z \, C) = B .$$

Si $M = Z$, $\overline{(z \, M)}$ es un subgrupo monógeno compacto.

Si $M = R$, $\overline{(z \, M)}$ es un subgrupo solemnoidal compacto.

Probemos ahora que $\overline{(z \, M)} = B \cap \overline{M}$.

Si $x \in \overline{(z \, M)}$ existe una red $\{ z \, m_i \}_{i \in I'}$ tal que $\lim\limits_{i \in I} (z \, m_i) = x$, como M no es compacto existe un $m \in M$ tal que $z \in \Gamma(m)$ y

$$x \in \overline{\{ m_i \; m^n \}_{i \in I, \, n \in N}}$$

luego $x \in B \cap \overline{M}$.

Inversamente si $x \in B \cap \overline{M}$, existe una red en M, $\{ m_i \}_{i \in I'}$, tal que $x = \lim\limits_{i \in I} m_i$, como $x \in B$:

$$x = z \, x = z \lim_{i \in I} m_i = \lim_{i \in I} (z \, m_i) \text{, luego } x \in \overline{(z \, M)} .$$

Además, observar que como M es conexo si y sólo si $M \simeq R$, 1 y z pertenecen a la misma componente conexa de S si y sólo si $M \simeq R$.

B) Como $\phi : C \longrightarrow B$ es un homomorfismo, pues $z^2 = z$
$c \longrightarrow zc$
y es continuo (B es ideal minimal) $\phi(C) = z \cdot C \simeq C/\ker \phi$

Reuniendo la información de los lemas anteriores:

Teorema II

Si S es un H-semigrupo abeliano, con subgrupo maximal denso G y frontera compacta B:

a) G es un subgrupo topológico de S, B es un ideal y un subgrupo topológico de S.

b) i)— Si z (elemento neutro de B) y 1 (el. neutro de G) no pertenecen a la misma componente conexa, G es isomorfo a $Z \times C$ con C un grupo compacto y Z el grupo aditivo de los números enteros, además B es isomorfo al producto de un grupo monógeno compacto A y del subgrupo compacto $C\,z$, el cual es isomorfo a C/H con $H = \{c \in C \,/\, c\,z = z\}$.

ii)— Si z y 1 pertenecen a la misma componente conexa, G es isomorfo a $R \times C$ con C un grupo compacto y R el grupo aditivo de los números reales, además B es isomorfo al producto de un grupo solenoidal compacto A y del grupo compacto $C\,z$ el cual es isomorfo a C/H siendo H,

$H = \{c \in C \,/\, c\,z = z\}$.

[1] Hofmann: Locally compact subgroups in which a subgroup with compact complement is dense. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1965).

[2] Ellis: A note on the continuity of the inverse. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957).

[3] Weil: l'Intégration dans les groupes topologiques et des applications. Act. Scien. Ind. (1951) 1145.

[4] Koch: On topological semigroups: Dissertation (1953).

[5] Hewitt y Ross: Abstract harmonic analysis. Acad. Press New York (1963).

[6] Paalman: Topological Semigroups: Dissertation (1964).

[7] Wallance: The structure of topologeical semigroups: Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955).

[8] Rees: On semigroups: Proc. Cambridge Philos. Soc. 36 (1940).

[9] Stepp: D-semigroups: Proc. Amer. Math. Soc. (1969).