

Collect. Math. **46**, 1–2 (1995), 143–150

© 1995 Universitat de Barcelona

Des anneaux aux conditions de chaines ascendantes sur les idéaux de type n

ANNE-MARIE NICOLAS

Université Claude Bernard LYON I, 69622 Villeurbanne Cedex, France

DÉDIÉ À LA MÉMOIRE DE PAUL DUBREIL

ABSTRACT

In this paper, written in honour of Professor P. DUBREIL, we construct commutative rings with n -acc property (i.e. every ascending chain of n -generated ideals stabilizes). The rings are obtained as subrings of rings which are known to be n -acc, using theorems of “ n -acc going-down” for rings which share an ideal. We got rings of the type $R + \mathcal{J}B$, of the type $D + \mathcal{J}$. Some unsolved problems are stated.

C'est en hommage à Monsieur le Professeur P. DUBREIL à qui je dois d'avoir pu exposer mes premiers travaux dans son séminaire de Paris, à l'Institut Henri Poincaré, en janvier 1967, que j'exposerai les résultats ci-dessous.

Le début de mes recherches avait en effet, porté sur les modules factoriels, puis factorables. Puis, ayant remarqué que, dans le cas des groupes (sans torsion), les modules factorables étaient ceux qui étaient 1-acc (c'est -à-dire tels que toute suite croissante de sous-groupes monogènes soit stationnaire), j'ai orienté mes recherches vers les conditions n -acc.

Les anneaux considérés seront *commutatifs* et unitaires.

Un anneau est dit n -acc si toute suite croissante d'idéaux engendrés par $\leq n$ générateurs est stationnaire. Les anneaux noetheriens sont n -acc pour tout n (condition *pan-acc*). Mais il existe des anneaux n -acc pour tout n , non noetheriens, les exemples les plus frappants étant:

$k[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ où k est un corps (cf. [4]), cet anneau étant même cohérent.

$k + M$, où $k + M \subset V = K + M$, anneau de valuation discrète, avec $[K : k] = \infty$ (cf. [6]) ce dernier n'étant pas cohérent.

C'est ce dernier exemple qui avait motivé un travail en commun M. E. Antunes Simoes (cf. [1]) et qui nous avait permis de donner beaucoup d'exemples d'anneaux n -acc non noetheriens:

$$k + XK[X], \quad k + XK[X, Y], \quad k + X_i K[X_1, \dots, X_n, \dots], \quad k + X^T T[X],$$

où T est un anneau noetherien, $\mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X]$ où p est un nombre premier.

Nous poursuivons ici le travail d'obtention d'anneaux n -acc par conservation par descente de la propriété n -acc sous certaines hypothèses. Nous utiliserons le résultat suivant établi dans [1].

Théorème 0-1

Soient deux anneaux $A \subset B$ possédant en commun un idéal $\mathcal{J}$. Si $A/\mathcal{J}$ est parfait, et si B est un anneau n -acc, alors A est un anneau n -acc.

Rappelons de plus qu'un A -module M est dit n -acc si toute suite croissante de sous-modules engendrés par $\leq n$ générateurs est stationnaire. Si A est noetherien tout A -module de type fini est n -acc pour tout n . Mais $k + M$ (cf. ci-dessus) n'est pas noetherien et possède cependant cette propriété. La situation de $k + M$ a été généralisée dans notre travail de [1] par le résultat suivant:

Théorème 0-2

Soient deux anneaux $A \subset B$, où B est tel que tout B -module de type fini soit n -acc pour tout n (pan -acc). On suppose que $\mathcal{J}$ est un idéal commun à A et à B , $\mathcal{J}$ étant de type fini sur B , et $A/\mathcal{J}$ étant parfait. Alors tout A -module de type fini est n -acc pour tout n .

EXEMPLE: $A = k + XK[X]$ est tel que tout A -module de type fini est n -acc pour tout n .

I. Anneaux de type $R + \mathcal{J}B$

Les anneaux commutatifs de type $R + \mathcal{J}B$ jouent un rôle important dans la construction d'anneaux. Il est donc intéressant de regarder s'ils sont n -acc.

R et B sont deux anneaux tels que $R \subset B$, et $\mathcal{J}$ est un idéal de R ; par exemple:

$$U + XT[X], \text{ avec } U \subset T, R = U[X], \mathcal{J} = XU[X], B = T[X].$$

$$\mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X], \text{ avec } R = \mathbb{Z}, \mathcal{J} = p\mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}[X], \text{ car } \mathbb{Z} + p\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X].$$

Posons $A = R + \mathcal{J}B$; A est un sous anneau de B et $\mathcal{J}B$ est un idéal commun à A et à B . On a: $A/\mathcal{J}B = R + \mathcal{J}B/\mathcal{J}B \simeq R/R \cap \mathcal{J}B$. En appliquant le théorème 0-1 on obtient:

Théorème 1-1

Soient $R \subset B$ deux anneaux, et $\mathcal{J}$ un idéal de R tel que $R \cap \mathcal{J}B$ soit maximal dans R . Si l'anneau B est n -acc, alors l'anneau $A = R + \mathcal{J}B$ est aussi n -acc.

Application: on retrouve le fait que $\mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X]$ est n -acc pour tout n , puisque $B = \mathbb{Z}[X]$ est noetherien donc n -acc pour tout n , et $R \cap \mathcal{J}B = p\mathbb{Z}$ est bien maximal dans $R = \mathbb{Z}$. Remarquons que l'anneau $\mathbb{Z} + 2X\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[2X, 2X^2, \dots, 2X^n, \dots]$ mentionné dans ([3] p. 321, ex. 21) n'est pas cohérent car l'intersection des deux idéaux principaux engendrés par $2X$ et $2X^2$ n'est pas de type fini.

Plus généralement, soit R un anneau noetherien commutatif unitaire intègre et soit M un idéal maximal de R . L'anneau $B = R[X_1, \dots, X_n]$ est n -acc pour tout n (car noetherien); $R \cap MB$ est un idéal de R qui contient M :

ou bien $R \cap MB = M$ et on peut appliquer le théorème 1-1.

ou bien $R \cap MB = R$ mais alors $R \subset MR[X_1, \dots, X_n]$, et $1 \in MR[X_1, \dots, X_n]$, ce qui impliquerait $1 \in M$, ce qui est faux.

On peut refaire le même raisonnement en prenant $B = R[X_1, \dots, X_n, \dots]$ qui n'est plus noetherien, mais est cependant n -acc pour tout n (cf. [4]).

On obtient donc le résultat suivant:

Corollaire 1-2

Soit R un anneau noetherien commutatif unitaire intègre, et soit M un idéal maximal de R .

Les anneaux $R + MR[X_1, X_2, \dots, X_n]$ et $R + MR[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ sont n -acc pour tout n .

Exploitions maintenant le théorème 0-2 pour les anneaux de type $R + \mathcal{J}B$. On obtient le résultat suivant:

Théorème 1-3

Soient $R \subset B$ deux anneaux et $\mathcal{J}$ un idéal de type fini de R tel que $R \cap \mathcal{J}B$ soit maximal dans R . On suppose que B est tel que tout B -module de type fini est n -acc pour tout n . Alors l'anneau $A = R + \mathcal{J}B$ est tel que tout A -module de type fini est n -acc pour tout n .

EXEMPLE: $A = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est tel que tout A -module de type fini est n -acc pour tout n .

II. Anneaux de type $D + \mathcal{J}$

Il s'agit ici de se placer dans un cadre beaucoup plus général que les constructions $D + M$ classiques (cf. [2]) où M était souvent maximal et où on avait $D \cap M = \{0\}$.

Nous avons déjà obtenu dans [1], comme corollaire du théorème 0-1, le résultat suivant:

Corollaire 2-1

Soit $B = R + \mathcal{J}$ un anneau n -acc, D un sous anneau de R , A l'anneau $D + \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ étant un idéal commun à A et à B . Si D est parfait, l'anneau $A = D + \mathcal{J}$ est n -acc.

Ce résultat permet d'obtenir beaucoup d'exemples où D est un corps k .

On voudrait maintenant affaiblir l'hypothèse D parfait (D parfait entraînait que tout D -module était n -acc [8]). On va supposer que tout D -module de type fini est n -acc, mais supposer de plus que R est de type fini sur D .

Soit $I_l = Ap_1^l + \dots + Ap_n^l$, où $(I_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'idéaux de A ;

$$I_l = \sum_{i=1}^n Dp_i^l + \mathcal{J}I_l.$$

$$BI_l = Bp_1^l + \dots + Bp_n^l = \sum_{i=1}^n Rp_i^l + \mathcal{J}I_l.$$

La suite $(BI_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir de l_0 (car B est n -acc) et de plus $\mathcal{J}I_l = \mathcal{J}I_{l_0}$ pour $l \geq l_0$; en effet si $l \geq l_0$, $p_j^l \in Bp_1^{l_0} + \dots + Bp_n^{l_0}$

$$\gamma \in \mathcal{J} \Rightarrow \gamma p_j^l \in \mathcal{J}I_{l_0}.$$

$I_l / \mathcal{J}I_{l_0} = \sum_{i=1}^n D \overline{p_i^l}$ est un D module de type $\leq n$.

Mais $I_l \subset BI_{l_0} = \sum_{i=1}^n Rp_i^{l_0} + \mathcal{J}I_{l_0}$ et si R est de type fini sur D , $BI_{l_0} / \mathcal{J}I_{l_0}$ est un D -module de type fini, donc n -acc par hypothèse. Il en résulte que la suite $(I_l / \mathcal{J}I_{l_0})_{l \geq l_0}$ est stationnaire à partir de h_0 ($h_0 \geq l_0$), et que la suite (I_l) est stationnaire à partir de h_0 . D'où le résultat:

Théorème 2-2

Soient $A = D + \mathcal{J}$ et $B = R + \mathcal{J}$ deux anneaux, où $D \subset R$ sont deux anneaux et $\mathcal{J}$ un idéal commun à A et à B . On suppose que R est de type fini sur D , et que l'anneau D est tel que tout D -module de type fini est n -acc.

Alors si l'anneau B est n -acc, l'anneau A est n -acc.

Remarquons que si R est de type fini sur D alors B est de type fini sur A et que dans le cas où $R \cap \mathcal{J} = \{0\}$ on a l'équivalence entre R de type fini sur D et B de type fini sur A . Rappelons que P. M. Eakin a démontré le résultat de descente noetherienne suivant: Si $A \subset B$ et si B est un A -module de type fini, et si B est un anneau noetherien, alors A est un anneau noetherien. D'où le problème suivant:

Problème 2-3. Si $A \subset B$, où B est de type fini sur A et si l'anneau B est n -acc pour tout n , l'anneau A est-il n -acc pour tout n ?

Nous allons maintenant appliquer le théorème 2-2 aux anneaux $R + \mathcal{J}B$ où $R \subset B$, $\mathcal{J}$ est un idéal de R , en posant $A = R + \mathcal{J}B$ et $B = B + \mathcal{J}B$, B étant supposé de type fini sur R . Supposant que tout R -module de type fini est n -acc, alors si B est un anneau n -acc, A est un anneau n -acc. On obtient:

Corollaire 2-4

Soit A un anneau de la forme $R + \mathcal{J}B$ où $R \subset B$ sont deux anneaux tels que B soit de type fini sur R et où $\mathcal{J}$ est un idéal de R . On suppose que tout R -module de type fini est n -acc. Alors si l'anneau B est n -acc, l'anneau A est n -acc.

Remarquons que par rapport à la situation du §I, nous n'avons pas de conditions sur la maximalité des idéaux.

Les résultats précédents sont des résultats de descente n -acc.

Nous allons maintenant examiner le problème de montée n -acc.

Lemme 2-5

Soient $S \subset T$ deux anneaux tels que T soit de type fini sur S . On suppose que tout S -module de type fini est n -acc pour tout n (i.e. pan-acc). Alors tout T -module de type fini est aussi n -acc pour tout n (i.e. pan-acc). En particulier T est un anneau pan-acc.

Il suffit de remarquer que si T est de type $\leq k$ sur S , tout T -module M de type fini est un S -module de type fini, et que tout sous T -module de M de type $\leq n$ est un sous- S -module de type $\leq kn$. En application du Lemme 2-5 nous obtenons les deux propositions suivantes:

Proposition 2-6

Soit D un anneau tel que tout D -module de type fini est pan-acc; soit A un anneau de la forme $D + \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un idéal de A , $\mathcal{J}$ étant un D -module de type fini.

Alors A est un anneau n -acc pour tout n , et tout A -module de type fini est n -acc pour tout n .

Proposition 2-7

Soit A un anneau de la forme $R + \mathcal{J}B$ où $R \subset B$ sont deux anneaux tels que B soit de type fini sur R , et où $\mathcal{J}$ est un idéal de R .

On suppose que tout R -module de type fini est pan-acc. Alors les anneaux B et $A = R + \mathcal{J}B$ sont des anneaux pan-acc (il suffit d'appliquer le Lemme 2-5 et le corollaire 2-4).

Signalons pour terminer ce paragraphe, que W. Heintzer et D. Lantz [4] ont montré que tout anneau fortement laskerien était pan-acc. D'autre part H. A. Hus-sain a donné pour des anneaux $R + \mathcal{J}B$ des propriétés de descente et de montée fortement laskerienne.

Par ailleurs S. Visweswaran dans [7] s'est intéressé aux sous anneaux $D + I$, où I est un idéal du domaine affine $K[y_1, \dots, y_t]$ et où D est un sous anneau de K , en particulier à leurs propriétés noetheriennes ou fortement laskeriennes. Mais noetherien ou fortement laskerien impliquant pan-acc, on peut donc se poser la question suivante:

Problème 2-8. Soit $S = D + I$ un sous anneau du domaine affine $K[y_1, \dots, y_t]$, où D est un sous anneau de K et I un idéal de $K[y_1, \dots, y_t]$. Quand est ce que S est un anneau pan-acc?

III. Descente n -acc pour les anneaux partageant le même idéal

Dans les paragraphes I et II nous avons considéré des anneaux de la forme $D + I$, ou $R + \mathcal{J}B$ et nous étions dans la situation où deux anneaux partageaient le même idéal. Mais nos hypothèses portaient sur l'anneau D , ou l'anneau R (et on n'avait pas nécessairement $D \cap \mathcal{J} = \{0\}$).

On veut maintenant essayer de généraliser le théorème 0-1 qui fait porter l'hypothèse sur $A/\mathcal{J}$. $A/\mathcal{J}$ parfait impliquait que tout $A/\mathcal{J}$ -module était n -acc (cf. [8]). On va affaiblir cette hypothèse en la remplaçant par la condition: tout $A/\mathcal{J}$ module de type fini est n -acc vérifié si $A/\mathcal{J}$ est un corps, ou $A/\mathcal{J}$ noetherien, ou $A/\mathcal{J}$ de la forme $k + M$ etc...). Malheureusement on rajoute une hypothèse qui est que B est de type fini sur A .

Théorème 3-1

Soient A et B deux anneaux partageant le même idéal $\mathcal{J}$ avec $A \subset B$. On suppose que B est de type fini sur A et que tout $A/\mathcal{J}$ module de type fini est n -acc.

Alors si B est un anneau n -acc, A est un anneau n -acc.

Démonstration du théorème 3-1: soit $(I_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de A de type n ; $I_l = Ap_1^l + \dots + Ap_n^l$

$$BI_l = Bp_1^l + \dots + Bp_n^l.$$

La suite $(BI_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est stationnaire pour $l \geq l_0$, car B est n -acc.

Posons $I = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} I_l$ on a $BI = BI_{l_0} = BI_l$ pour $l \geq l_0$.

On a aussi: $\mathcal{J}I = \mathcal{J}I_{l_0} = \mathcal{J}I_l$ pour $l \geq l_0$. Il en résulte que:

$I_l/\mathcal{J}I_{l_0}$ est un $A/\mathcal{J}$ module de type $\leq n$

$BI/\mathcal{J}I_{l_0} = BI_{l_0}/\mathcal{J}I_{l_0}$ est un $B/\mathcal{J}$ module (de type fini).

Par ailleurs $\mathcal{J}$ étant commun à A et à B , $A/\mathcal{J} \hookrightarrow B/\mathcal{J}$, et $BI/\mathcal{J}I_{l_0}$ est un $A/\mathcal{J}$ module de type fini (car B étant de type fini sur A , $B/\mathcal{J}$ est de type fini sur $A/\mathcal{J}$). Donc $BI/\mathcal{J}I_{l_0}$ est un $A/\mathcal{J}$ module n -acc. Il en résulte que la suite $(I_l/\mathcal{J}I_{l_0})_{l \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir de h_0 ($h_0 \geq l_0$).

Pour $h \geq h_0$, tout $x \in I_h$ est de la forme $z + \mu$ où $z \in I_{h_0}$ et $\mu \in \mathcal{J}I_{l_0} = \mathcal{J}I_{h_0}$; donc $x \in I_{h_0}$; et $I_h = I_{h_0}$ pour $h \geq h_0$.

(Remarquons que nous avons utilisé l'hypothèse B de type fini sur A en se servant du fait que alors $B/\mathcal{J}$ était de type fini sur $A/\mathcal{J}$. Mais il est facile de voir que: B de type fini sur $A \iff B/\mathcal{J}$ de type fini sur $A/\mathcal{J}$). $\square$

Il est naturel de se poser la question suivante:

Problème 3-2. Soient $A \subset B$ deux anneaux partageant le même idéal $\mathcal{J}$. On suppose que tout $A/\mathcal{J}$ module de type fini est n -acc. Alors est ce que: B n -acc $\Rightarrow A$ n -acc?

Donnons maintenant une application du théorème 3-1 qui peut être vue comme une généralisation de la construction $D + M$ (considérée comme un produit fibré).

Corollaire 3-3

Soient D, T, L trois anneaux tels que $i : D \hookrightarrow L$ soit un morphisme injectif, et $\varphi : T \twoheadrightarrow L$ soit un morphisme surjectif. Soit R l'anneau $\varphi^{-1}(i(D))$ si bien qu'on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} R = \varphi^{-1}(i(D)) & \xrightarrow{\varphi'} & D \\ \downarrow i' & & \downarrow i \\ T & \xrightarrow{\varphi} & L \end{array} \quad \delta = \varphi'(x) \iff \varphi(x) = i(\delta).$$

On suppose que tout D -module de type fini est n -acc, et que L est de type fini sur $i(D)$. Alors si T est un anneau n -acc, R est un anneau n -acc.

Il suffit pour pouvoir appliquer le théorème 3-1 de remarque que $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi'$ est un idéal commun à T et à R , que $R/\text{Ker } \varphi \simeq D$, et que l'on a l'équivalence: T de type fini sur $R \iff L$ de type fini sur $i(D)$.

Références

1. M. E. Antunes Siomes et A. M. Nicolas, Exemples d'anneaux n -acc, *Comm. Algebra* **12-13** (1984), 1653–1665.
2. J. W. Brewer and A. Rutter, $D + M$ Constructions with general Overrings, *Michigan Math. J.* **23** (1976), 33–42.
3. R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, M. Dekker, New York, 1972.
4. W. Heinzer and D. Lantz, Commutative Rings with acc on n -generated Ideals, *J. Algebra* **80** (1983), 261–278.
5. A. M. Nicolas, Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire, *J. Algebra* **60** (1979), 249–259.
6. A. M. Nicolas, *Thèse: modules factorables, modules n -acc*, Limoges, 1981.
7. S. Wisweswaran, Subrings of $K[y_1, \dots, y_t]$ of the type $D + \mathcal{J}$, *J. Algebra* **117** (1988), 374–389.
8. G. Renault, Sur des conditions de chaînes ascendantes dans des modules libres, *J. Algebra* **47** (1977), 268–275.