

El naixement dels nombres complexos

Cori Molas
Juli Pérez

Presentació

Amb aquest article voldríem donar una visió general del naixement dels nombres complexos. Tradicionalment en els manuals d'història de les matemàtiques apareix aquest tema d'una manera secundària i una mica dispersa. L'article que teniu a les vostres mans no pretén ser res més que una recopilació de bona part del material ja existent. Fem un seguiment dels nombres complexos des de la seva primera aparició amb els matemàtics italians del Renaixement fins a la seva formalització amb Gauss.

La nostra concepció de la matemàtica com a un gran cos on hi podem distingir diferents branques interrelacionades ha fet que aquest treball no es quedés únicament en el seguiment d'una d'aquestes branques (la que fa referència als nombres complexos) sinó que hem intentat veure les connexions i influències d'altres especialitats de la matemàtica. Es per això que, per exemple, no hem pogut deixar d'explicar breument el treball importantíssim fet per Viète amb la formalització del llenguatge algebraic, ja que tot i no tenir una relació directa amb el món del nombre complex, ben segur que era un pas imprescindible per al seu millor coneixement.

1. Època renaixentista

1.1. Breu introducció històrica

L'any 1453 es produeix la caiguda de Constantinopla en mans dels turcs, que va marcar el col·lapse definitiu de l'Imperi Bizantí. Per una banda això va provocar l'arribada a Itàlia de manuscrits grecs junt amb el refugiats i per l'altre Occident va deixar de comptar amb la font de materials dels antics clàssics tant literaris com filosòfics o matemàtics. De tota manera el que és segur és que l'activitat matemàtica va tenir un fort desenvolupament durant el segle XV.

Europa es recupera de la gran commoció que provocà la Peste Negra i tot just s'acaba d'inventar la impremta, que fa possible que les obres cultes s'estenguin i estiguin molt més a l'abast que anteriorment. El primer llibre imprès a Europa Occidental està datat el 1447 i a finals de segle ja es disposava de més de 30.000 edicions

d'obres molt variades. Poques d'aquestes obres tractaven de matemàtiques, però aquestes junt amb els manuscrits ja podien ser una bona base per a una expansió posterior.

La recuperació dels tractats clàssics geomètrics grecs fou en principi menys important que la impressió de les traduccions llatines medievals dels tractats aritmètics i algebraics àrabs, ja que, en qualsevol cas, pocs homes durant el segle XV podien llegir grec o tenir un coneixement de matemàtiques prou avançat per a entendre les obres dels geomètres clàssics.

De fet, tot i que ja existia una traducció llatina d'una part de l'obra d'Arquimedes, no s'utilitzà gairebé gens ja que eren molt pocs els que estaven en condicions d'apreciar la matemàtica a aquest nivell de sofisticació.

La matemàtica, excepció feta de les parts més elementals d'Euclides, era una matèria accessible només a aquells que comptaven amb una forta preparació prèvia i, per tant, la divulgació dels tractats grecs no afectà la continuïtat de la matemàtica medieval.

Els estudis llatins medievals sobre geometria elemental i la teoria de proporcions, així com les contribucions àrabs a la teoria de les operacions aritmètiques i dels mètodes algebraics, no presentaven, evidentment, dificultats comparables a les obres d'Apolloni i Arquimedes. Així, les rames més elementals de la matemàtica van ser les que atragueren l'atenció general i les primeres en aparèixer publicades com a llibres impresos.

Si deixem de banda l'adveniment de la perspectiva i algun indici del futur càlcul infinitesimal la preocupació del segle XVI era de caire instrumental. Influeixen en la matemàtica tres elements externs:

- les exigències dels artistes que donen lloc al naixement de la perspectiva;
- les necessitats dels comerciants que provoquen innovacions en l'aritmètica;
- els requeriments dels astrònoms que porten a un perfeccionament de la trigonometria.

L'àlgebra es manté en el caràcter tècnic especulatiu encara que destaca en el seu desenvolupament una nota característica de l'època, l'interès pel planteig i la proposta de qüestions difícils i l'atracció dels tornejos, concursos i reptes entre els matemàtics d'aquells temps.

1.2. La resolució d'equacions, necessitat d'arrels imaginàries

El desig dels algebristes de poder resoldre totes les equacions polinòmiques crearà la necessitat de disposar d'un nou sistema de nombres en el qual existeixin els quadrats dels nombres negatius.

Els antics grecs negaven l'existència tant dels nombres irracionals com dels negatius i imaginaris, així Diofant diu que són equacions no resolubles:

$$x + 2 = 0 \quad x^2 = 2 \quad x^2 + 2 = 0$$

En el segle IX de la nostra era Muhamed Ibn Musâ Alchwarizmi, en la seva Àlgebra, ja fa notar la impossibilitat de resoldre algunes equacions sense la consideració de nous ents.

Abans del segle XVI ja s'havien acceptat amb normalitat els nombres irracionals, ja que es podien aproximar fàcilment per nombres racionals (tot i que no estaven fonamentats de manera rigorosa). Els nombres negatius produïen més dificultat ja que no es podien aproximar en cap sentit natural per nombres positius, però la idea de sentit o direcció sobre una recta els feia possibles com a magnitud orientada.

L'any 1484 apareix a França el *Triparty*, de Nicolàs Chuquet, que tal com el seu nom indica consta de tres parts: la primera dedicada a operacions aritmètiques racionals, la segona a càlculs amb arrels de nombres i la tercera a la regla de les incògnites o àlgebra tal com diríem nosaltres. Chuquet aporta una notació exponencial i expressa per primera vegada un nombre negatiu en una equació algebraica:

$$\cdot 4 \cdot ^1 \cdot \text{eglaux a } \bar{m} \cdot 2 \cdot ^0 \quad (4x = -2)$$

També fa notar que el nombre zero pot ser en algun cas la solució. En estudiar equacions de la forma

$$ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2}$$

amb coeficients i exponents sempre positius es va trobar amb alguns casos d'arrels imaginàries; en aquest cas deia: «el nombre est ineperible».

Aquest llibre no es va publicar fins el 1880 però ben segur que el seu manuscrit va influenciar d'altres autors de l'època.

En principi no hi havia necessitat d'animals tals com les arrels quadrades de nombres negatius, però el descobriment de la solució de les equacions cúbiques, feta pels algebristes italians del segle XVI, canvià totalment la situació. Buscaven arrels reals d'equacions cúbiques i la fórmula els portava a arrels de nombres negatius en casos en què coneixien l'existència d'alguna arrel real!, així encara que només fós per trobar arrels reals havien d'estudiar el comportament d'aquests nombres imaginaris.

1.3. Algebristes italians i l'equació cúbica

La solució de les equacions de tercer i quart grau, descobriments que es revelen en l'obra de Cardano *Ars Magna*, van ser de gran estímul per al desenvolupament de l'àlgebra. Els matemàtics van intentar de resoldre l'equació de cinquè grau i es van trobar durant més de dos segles i mig amb un problema algebraic comparable als tres problemes geomètrics clàssics de l'antiguitat. El resultat de tot això produirà molta i molt bona matemàtica, però portarà inevitablement a una conclusió negativa.

Una altra conseqüència de la solució de l'equació cúbica va ser que va portar a les primeres consideracions significatives sobre un nou tipus de nombre.

La solució de l'equació cúbica es va fer al segle XVI pels matemàtics Scipione Del

Ferro, Niccolo Tartaglia i Girolamo Cardano. Segueixen unes breus notes biogràfiques d'aquests singulars personatges, el treball dels quals fou d'una importància fonamental per la història de l'àlgebra.

Scipione del Ferro

Matemàtic italià, fou professor a la Universitat de Bolònia des del 1496 fins l'any de la seva mort el 1526. El 1515 descobrí la construcció de l'arrel real de l'equació de tercer grau sense segon terme, però no ho publicà. Només la diu al seu amic Antonio Maria Fiore qui el 1535 amb motiu d'una justa matemàtica s'enfronta a Tartaglia qui redescobrirà aquesta fórmula.

Ferro s'ocupà també en construccions geomètriques i deixà els seus manuscrits al seu gendre Anibal della Nave però s'ignora que se n'ha fet.

Niccolo Tartaglia

Matemàtic italià nascut a Brescia l'any 1499 i mort a Venècia el 1557. El seu nom veritable era Niccolo Fontana i el renom de Tartaglia li ve d'haver-se quedat tartamut als set anys a conseqüència d'una ferida. Fill de pares pobres i vells arribà a l'adolescència sense saber llegir i no se sap com, mentre treballava adquirí la formació necessària per arribar a ser un dels matemàtics més cèlebres de la seva època. El 1530 ja era professor a Verona i després ho fou a Pàdua, Vicenza, Milà i Venècia, on ocupà la càtedra de 1539 fins a la seva mort.

Tartaglia fou un matemàtic insigne, tractà problemes de càlcul de probabilitats, estudià gran nombre de determinacions de pesos específics i perfeccionà la balística, però sobretot és cèlebre per compartir amb Ferro la primícia del descobriment de la solució de l'equació de tercer grau.

L'obra mestra de Tartaglia és *General trattato de numerica misura* (Venècia, 1556-1560), que no conté la solució abans anomenada, que es troba a *Quesiti ed inventioni diverse* (Venècia, 1554). Altres obres són *La travagliata invenzione* i *Trattato di Aritmetica*. També traduí a l'italià la *Geometria* d'Euclides i les obres d'Arquimedes.

Girolamo Cardano

Filòsof metge i matemàtic italià, va néixer a Pavia el 1502 i morí a Roma el 1576. Fill natural del juriconsult i matemàtic Facio. Als 25 anys donava lliçons de metafísica i dialèctica i el 1524 ocupà el rectorat de la Universitat de Padua on es doctorà en medicina. Ocupà la càtedra de matemàtic a Milà el 1534. Tornà a Pavia a donar conferències sobre medicina. El 1552 és cridat a Escòcia per guarir a l'Arquebisbe de Hamilton. Viatja per Anglaterra, França, Països Baixos i Alemanya i torna a Milà on residí alguns anys entregat a l'estudi. Continua en càtedres de medicina a Pavia i a Bolònia, on víctima d'una falsa acusació és empresonat durant dos anys. Torna a Roma i ingressa al Col·legi de Metges. Home dotat d'un gran cabal de ciència era a la

vegada molt supersticiós i en la seva vida no hi falten calamitats. Per conèixer el seu propi caràcter es pot llegir la seva obra *De vita propria*.

Es degut a Cardano un procediment pel càlcul aproximat de les arrels de les equacions de grau superior, la idea que eren tres les arrels d'una equació cúbica, el descobriment de les relacions entre alguns coeficients i les arrels de les equacions de segon i tercer grau i les seves obres van servir de base a Ferrari per trobar la solució de la quàrtica.

L'obra principal de Cardano és *Ars Magna*.

Ludovico Ferrari

Matemàtic italià neix i mor a Bolònia (1522-1565). Deixeble de Cardano amb tant profit que als 18 anys ja donava lliçons de matemàtiques a Milà. Durant set anys dirigí les operacions del cadastre en el Milanesat. A causa d'una malaltia s'ha de retirar a Bolònia on dona classes de matemàtiques. Morí de sobte.

A ell és deguda la primera solució de l'equació de quart grau quan tenia només 23 anys, mètode explicat al capítol tres de l'obra de Cardano *Ars Magna*. També se li deu un procediment per a la producció d'un moviment rectilini alternatiu per una combinació de rotacions. És coneguda la polèmica que tingué amb Tartaglia. Algun autor diu que deixà algunes obres, però no se'n té cap notícia.

1.4. La resolució de l'equació cúbica

Abans d'estudiar com arribaren els matemàtics a trobar la solució de la cúbica cal tenir en compte un parell de punts:

- no es consideren els coeficients negatius, això suposa tenir diversos tipus d'equacions cúbiques;
- utilitzaven una notació ben diferent a la nostra. Per oferir més claredat en l'explicació utilitzaré la notació actual.

L'equació cúbica general és:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

i pot ser reduïda amb la introducció d'una nova variable

$$x' = x + \frac{1}{3}a$$

a la forma simple

$$x'^3 + px + q = 0$$

Hi ha tres tipus d'equacions si només admeten valors positius dels coeficients:

- 1) $x^3 + px = q$
- 2) $x^3 = px + q$
- 3) $x^3 + q = px$

El primer en resoldre l'equació 1) va ser Scipione del Ferro.

La idea fonamental de la solució de 1) és molt simple. Seguirem l'explicació de Cardano del mètode donada a *Ars Magna*.

Cardano comença amb l'exemple:

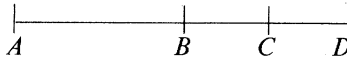
$$4) \quad x^3 + 6x = 20$$

Cardano expressa aquesta equació en el llenguatge de la seva àlgebra retòrica com: «Suposem un cub i sis vegades el seu costat igual a vint».

La idea de Cardano és resoldre l'equació posant:

$$x = u - v$$

Cardano expressa això en termes geomètrics, representa la nostra u pel segment AC i la nostra v pel segment CD , aleshores marca BC igual a CD ; un cop fet això la línia restant AB és la nostra x .



Sostituint $x = u - v$ a 4) hom obté:

$$5) \quad x^3 + 6x = (u - v)^3 + 6(u - v) = u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6(u - v) = 20$$

Ara u i v han de complir les condicions:

- 6) $u^3 - v^3 = 20$
- 7) $3uv = 6$

Aleshores segueix que $x = u - v$ satisfà l'equació:

$$x^3 + 6x = 20$$

En la terminologia geomètrica de Cardano la reducció de $(u - v)^3$ a $u^3 - v^3 - 3uv(u - v)$ és molt molesta, però la idea fonamental és la mateixa.

És fàcil trobar u i v de les condicions 6) i 7).

De 7) trobem $uv = 2$ i així $u^3v^3 = 8$.

Ara la diferència i el producte de 2 cubs és coneguda i hom troba:

$$u^3 = \sqrt{108} + 10$$

$$v^3 = \sqrt{108} - 10$$

Així doncs u i v són arrels cúbiques de nombres coneguts i tenim:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Tot i que les seves explicacions són sempre sobre exemples concrets, Cardano formula això com una regla general:

«El cub d'un terç del "nombre de costats" (i.e., un terç del coeficient de x) afegir-lo al quadrat d'un mig de la constant de l'equació i prendre l'arrel quadrada de tot. Faràs això dues vegades, en una de les dues hi afegeixes el nombre que has quadrat i en l'altra l'hi restes. Tu ara tens el binomi $(\sqrt{108} + 10)$ i l'apotema $(\sqrt{108} - 10)$. Aleshores restant l'arrel cúbica de l'apotema de l'arrel cúbica del binomi s'obté el costat buscat.»

Just després de la visita de Tartaglia, en que li explica la seva solució, Cardano tingué èxit en estendre el mètode de resolució de l'equació (1) als altres tipus (2) i (3). En aquests casos hem d'escriure la solució com $u + v$ en lloc de $u - v$. Pel que fa a la resta, els càlculs són els mateixos. Així en el cas (2) hom té:

$$\begin{aligned} x^3 - px &= q \\ x &= u + v \\ x^3 - px &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - p(u + v) = q \\ 3uv &= p \\ u^3 + v^3 &= q \\ u^3 &= \frac{1}{2}q = w \\ v^3 &= \frac{1}{2}q - w \end{aligned}$$

amb (8) $w = \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{2}q)^3}$ i d'aquí

$$(9) \ x = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w}$$

Però ara sorgeix una nova dificultat: la diferència sota l'arrel de l'expressió (8) pot ser negativa. Aquest cas s'anomena «casus irreducibilis» i la fórmula «no ens troba» cap arrel real, encara que l'equació pot ser solucionada per nombres reals.

Cardano es troba amb l'exemple:

$$x^3 = 15x + 4$$

i la seva fórmula li dóna com a solució:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} !!!$$

Cardano sabia que no existeixen les arrels de nombres negatius i també sabia que $x = 4$ era solució de l'equació i no ho podia entendre.

Cardano coneixia aquesta dificultat i en el capítol 1 de la seva *Ars Magna* presenta una completa discussió de les arrels de nombres positius i negatius dels tipus de l'e-

quació cúbica (1), (2) i (3), si $(\frac{1}{3}p)^3$ excedia $(\frac{1}{2}q)^2$ hi ha totes tres solucions reals. De tota manera en explicar la solució per mitjà d'arrels cúbiques curiosament evita el «casus irreducibilis». En tots els seus exemples, w és arrel d'un nombre positiu i hi ha només una arrel (positiva). En el «casus irreducibilis» hom ha de fer l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. Aquesta arrel quadrada que nosaltres anomenarem «imaginària» surt també en un altre capítol de *Ars Magna*. En el capítol 37 Cardano posa el problema: Dividir 10 en dues parts, el producte de les quals sigui 40. Es troba amb $5 \pm \sqrt{-15}$ (5p: Rm: 15 i 5m: Rm: 15). Ell escriu:

«Es clar que aquest cas és impossible. No obstant treballaré així: Dividim 10 en dues parts iguals, cada una 5, fem el quadrat; dóna 25. Restem 40, de 25 així trobat, comvaig mostrar-te en el capítol de les operacions en el llibre 6.^e, dóna com a resta -15. L'arrel d'aquesta sumada o restada a 5 dóna les parts, el producte de les quals és 40. Poden ser $5 + \sqrt{-15}$ i $5 - \sqrt{-15}$.»

Cardano després verifica que els dos nombres així trobats satisfan les condicions requerides. Escriu:

«Deixant a part les complicades tortures mentals, multiplico $5 + \sqrt{-15}$ per $5 - \sqrt{-15}$ que dóna $25 - (-15)$ que és $25 + 15$; així el producte és 40 i la seva suma 10... Això és realment sofisticat.»

Així Cardano fou el primer a introduir els nombres complexos $a + \sqrt{-b}$ a l'àlgebra, però tenia serioses pors i dubtes sobre ells.

1.5. Rivalitat entre els matemàtics de l'època

Era un temps de grans disputes, sovint per una suma considerable de diners; aquesta era una forma normal de competició en el món del coneixement. La resolució de l'equació cúbica és plena d'anècdotes sobre els concursos i els secrets que envoltaven els coneixements matemàtics. Vegem una versió d'aquests fets.

Scipione del Ferro mai no publicà la seva solució, només l'explicà a alguns amics, entre ells Antonio Maria Fiore. En 1535 Tartaglia fou desafiat a un concurs per Fiore. Hi havia 30 problemes i el perdedor hauria de pagar al seu contrincant 30 banquets. Tartaglia preparà diversos problemes, però els de Fiore depenien tots de la solució de l'equació cúbica del tipus (1). Tartaglia, just abans que acabés el temps acordat, tingué una inspiració, redescobrí la fórmula i resolgué els 30 problemes en poques hores. Fiore no resolgué cap dels problemes proposats per Tartaglia i fou declarat perdedor. Tartaglia s'acontentà amb l'honor d'haver guanyat i renuncià als 30 banquets.

En 1539 entra en escena Cardano que es dirigí a Tartaglia per mitjà d'un intermediari. Com que Tartaglia no volgué revelar el seu mètode, Cardano l'animà a anar a Milà a casa seva i li va prometre de presentar-lo a un marquès, comandant militar de Milà. Tartaglia, que havia fet alguns invents militars i estava desitjós d'ensenyar-los al marquès, acceptà la proposta de Cardano. Un cop a Milà, Cardano persuadí a Tartaglia a que li revelés el secret de la solució del «cub i la cosa». Cardano prestà jurament que mai publicaria els descobriments de Tartaglia i aquest li ex-

plicà la solució de l'equació (1). Just després de la visita de Tartaglia, Cardano va estendre la solució als altres tipus d'equacions cúbiques.

El deixeble de Cardano, Ferrari, va descobrir que l'equació general de quart grau pot ser reduïda a la de tercer i així la resolgué per mitjà d'arrels quadrades i cúbiques. Cardano explica el mètode de Ferrari en el capítol 3 de la seva *Ars Magna*. És un procés per completar quadrats de l'estil $(x^2 + a + b)^2$.

Cardano i Ferrari estaven en una situació violenta. Acabaven de fer descobriments extremadament importants i no els podien publicar degut al jurament fet a Tartaglia sobre la publicació de la solució de l'equació cúbica que era la base dels seus treballs.

L'any 1543 Cardano i Ferrari decideixen anar a Bolònia i preguntar a Anibal della Nave (el gendre de Del Ferro) què hi havia de cert en els rumors que deien que Scipione del Ferro ja havia trobat la solució de l'equació (1). Van ser ben rebuts i obtingueren permís per examinar els papers pòstums de Scipione, en els quals van trobar la solució clarament explicada. Llavors Cardano decidí publicar la solució de les equacions cúbica i biquadràtica en el seu llibre *Ars Magna*, deixant clar que la solució de l'equació (1) fou feta per Scipione del Ferro i redescoberta per Tartaglia i que ell mateix l'havia estès a la solució dels altres tipus d'equació cúbica o que la solució de l'equació biquadràtica fou feta per Ferrari. Tartaglia s'enfurismà i l'any següent publicà la història del jurament amb tots els detalls, fins i tot el text que jurà Cardano.

1.6. Rafael Bombelli i la seva *Àlgebra*

Rafael Bombelli, enginyer italià del segle XVI, fou l'autor de l'última obra dels algebristes italians del segle XVI. Es tracta d'una obra que consta de tres llibres i titulada *Àlgebra*. El seu manuscrit s'ha datat l'any 1550 (després de la polèmica entre Tartaglia i Ferrari) però fou editada per primera vegada a Venècia el 1572 i després a Bolònia el 1579. Entre la data del manuscrit i la de la primera publicació, Bombelli conegué l'obra de Diofant, coneixement que l'influencià com es pot comprovar comparant el manuscrit i el text imprès de l'obra.

Bombelli admirava l'*Ars Magna* de Cardano, però s'adonà que la seva exposició no era massa clara. Així es decidí a escriure un tractat que ajudés al principiant a dominar la matèria sense l'ajuda de cap altre llibre.

L'*Àlgebra* de Bombelli és important per les innovacions que introdueix i també perquè mesura el progrés que es va realitzant en el procés de la dissolució de l'imperialisme geomètric de la ciència grega, reflectit en l'absorció de la geometria per l'àlgebra.

El primer llibre de l'*Àlgebra* de Bombelli s'ocupa del càlcul de radicals, en particular d'arrels quadrades i cúbiques. És molt destacable la seva aproximació d'arrels quadrades per fraccions contínues, construeix geomètricament l'arrel quadrada i en aquesta construcció apareix per primer cop el segment unitari. Estén el mètode d'aproximació a arrels cúbiques i més tard tracta també les quartes i les cinques. Uti-

litza, com altres autors, una R com a símbol de l'arrel seguida d'una q o una c segons sigui quadrada o cúbica.

Però la novetat més important que introdueix Bombelli en la seva *Àlgebra* és el tractament dels nombres complexos i de les seves operacions. En el text manuscrit apareixen els nombres imaginaris com a arrels quadrades de nombres negatius. En el text imprès, de més de vint anys després, utilitza ja una simbologia especial per aquests nombres. Diu textualment en el llibre imprès:

«He trobat una altre espècie d'arrels cúbiques lligades (es refereix a les arrels cúbiques irracionals que es presenten del cub igual a tants i nombres —per influència de Diofant canvia el terme «coses» pel de «tants»—). Quan el cub de la tercera part dels tants és major que el quadrat de la meitat del nombre (és el nostre cas irreductible) aquesta espècie d'arrel té en l'algorisme un altre nom i unes altres operacions.

Com que no es pot anomenar ni menys ni més, l'anomenaré *més de menys* quan s'hagi de sumar i *menys de menys* quan s'hagi de restar..., això a moltes persones els pot semblar més sofisticat que real, com també em va passar a mi al principi, fins que vaig trobar la demostració geomètrica...»

Exposa després correctament les operacions amb els símbols $p\ dm$ i $m\ dm$ (per piu di meno i meno di meno) de la mateixa forma que es fa actualment amb els seus equivalents i i $-i$. Opera amb aquests nous símbols i dona les regles que necessitarà per trobar les arrels cúbiques d'aquests nombres que avui anomenem complexos. Vegem un exemple numèric d'aquestes regles donat per Bombelli.

Volem obtenir l'arrel cúbica de $52 + 47i$

$$\sqrt[3]{a + bi} = u + vi$$

Sumem els quadrats d'ambdós nombres que dona 4913 que és el cub de 17

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^3.$$

Busquem ara un nombre el quadrat del qual sigui menor que 17 i el cub del qual sigui més gran que 52

$$u^2 < \sqrt[3]{a^2 + b^2} \quad u^3 > a$$

Aquest nombre només pot ser 4. Si és així, l'arrel serà $4 + i$, així la suma dels quadrats és 17 i el cub del primer nombre menys el triple del primer pel quadrat del segon, que és 12, és 52.

$$u^3 - 3uv^2 = a$$

El llibre segon de *Àlgebra* s'ocupa de polinomis i d'equacions. El seu algorisme del $p\ dm$ i del $m\ dm$ li permet obtenir les arrels complexes conjugades d'una equació de segon grau sense arrels reals. Respecte això Bombelli diu (utilitzem símbols actuals): «Si vols igualar $x^2 + 20$ a $8x$, essent el quadrat de la meitat dels tants: 16 menor

que 20, aquesta igualació no es podrà fer si no és de manera sofisticada. Resta 20 de 16, dóna -4 , la seva arrel és $2i$ que sumem i restem a la meitat dels tants, i obtenim $4 + 2i$ o $4 - 2i$ i cadascuna d'aquestes quantitats per separat seran el valor del tant».

La contribució més gran de Bombelli a la teoria d'equacions és la resolució del cas irreductible de l'equació cúbica. Vegem-ne un exemple: sigui igualar x^3 a $15x + 4$. En aquest cas, diu Bombelli, preneu la tercera part dels tants, que és 5, i eleveu-la al cub, que és 125, aquest ha de restar-se del quadrat de la meitat dels nombres que és 4; s'obté m 121, l'arrel quadrada del qual és $p d m$ 11 (és a dir 11*i*). Aquesta arrel agregada a la meitat del nombre, fa $2 p d m$ 11, l'arrel cúbica del qual és $2 p d m$ 1, que sumada al seu residu (el conjugat) $2 m d m$ 1 dóna 4, que és el valor del tant (l'arrel de l'equació).

Aquesta regla, tal com reconeix Bombelli, només és vàlida en el cas que l'arrel sigui racional o irracional quadràtica de part real racional no nul·la, però insinua la relació entre el cas general i la trisecció de l'angle.

També és notable en Bombelli un estudi general de l'equació de quart grau, que ni Cardano ni Ferrari havien fet, així com tot el referent a teoria d'equacions: canvi de signe de les arrels, substitució de la incògnita per un valor proporcional al seu recíproc, o per una altra incògnita sumant-li o restant-li un nombre...; transformacions que utilitza per reduir tota cúbica a les formes canòniques.

El tercer llibre de l'*Àlgebra* és una col·lecció de 273 qüestions, més de la meitat de les quals són transcripcions de problemes de l'*Aritmètica* de Diofant.

Com a novetat destaca l'ús de lletres per a resoldre una qüestió.

Els llibres quart i cinquè són d'àlgebra geomètrica. Resol geomètricament les operacions aritmètiques, fins i tot de l'arrel cúbica per mitjà de la determinació de dues mitjanes proporcionals. Tota la geometria de Bombelli és una prova de la seva afirmació: «tot el que es fa amb nombres pot fer-se també amb línies».

2. De Viète a Descartes

Tot i que els autors tractats en aquest capítol no treballen de manera directa el nombre complex, les contribucions a l'àlgebra, el descobriment de noves funcions i el simbolisme algebraic fan donar un pas endavant a la matemàtica i en particular ajudaran els matemàtics posteriors en l'avenç de la teoria sobre el nombre complex.

Com hem vist, el primer cop que apareix el nombre complex és amb els algebristes italians del segle XVI. Aquests autors utilitzen pràcticament un llenguatge narratiu per a resoldre equacions que són per altra banda problemes concrets amb dades numèriques en la majoria dels casos.

Serà Viète qui amb el seu intent d'introduir una simbologia algebraica donarà un fort pas endavant.

Més conegut pel seu nom llatinitzat, Franciscus Vieta va néixer a Fontenay-le-Comte. Va ser conseller del Parlament de Bretanya i «Maître de requêtes de l'hôtel du roi» durant els regnats d'Enric III i Enric IV.

Pot ser considerat el fundador de l'àlgebra moderna; va estudiar els treballs de

Cardano, Tartaglia, Bombelli, Stevin i Diofant els quals li inspiraren la idea de fer servir lletres. Si bé ja amb anterioritat Euclides, Aristòtil i d'altres havien fet servir lletres en lloc de nombres específics, aquest ús era infreqüent, esporàdic i accidental. Viète va ser el primer a fer-les servir sistemàticament, no tant sols com a incògnites sino també com a coeficients.

Va estudiar les equacions i els mètodes per a l'extracció d'arrels, va calcular el nombre π amb una exactitud gran, va analitzar les funcions angulars, la trigonometria i la resolució de triangles.

El va fer famós el fet d'aconseguir desxifrar la clau secreta del govern espanyol aplicant procediments matemàtics.

Va aplicar també per primera vegada l'àlgebra a la geometria: la motivació per a molts dels seus treballs va ser resoldre problemes geomètrics i sistematitzar construccions geomètriques.

Viète va ser un humanista en intenció i esperit, desitjava ser el conservador, redescobridor i continuador de la matemàtica antiga, la innovació era per a ell renovació. Publicà *Canon mathematicien* (1579), *Supplementum geometricae* (1593) i *In artem analyticem Isagoge* (1591). Morí a París el 1603; les seves *Opera mathematica* foren editades per F. van Schooten a Lió l'any 1646.

En el seu llibre *In artem analyticem Isagoge* (1591) Viète és el primer autor que utilitza lletres (majúscules) per designar quantitats conegudes o desconegudes. Proposa d'utilitzar una vocal per representar una quantitat desconeguda i una consonant per designar una quantitat coneguda. És el primer cop en la història de l'àlgebra que hi ha una distinció clara entre el concepte de paràmetre i incògnita.

Tot i així Viète no va adoptar símbols ja existents en la seva època; podríem dir que la seva àlgebra és bàsicament sincopada més que simbòlica ja que, tot i utilitzar els símbols germànics per la suma i la resta i símbols diferents per paràmetres i incògnites, la resta de la seva àlgebra es basa en paraules i abreviacions.

En el capítol 3 del llibre abans esmentat *Isagoge* exposa la «lleï d'homogeneïtat» on associa una dimensió als paràmetres d'una equació. Això va repercutir amb sèries restriccions per a la formalització algebraica, que no seran eliminades fins molt més tard per Descartes.

Aquí tenim un exemple per entendre el simbolisme de Viète:

Per escriure l'equació quadràtica $bx^2 + dx = f$ Viète escriu: «*B in A Quadratu, + D plano in A, aequari F solido*».

En el capítol 4 de *Isagoge* estableix les transformacions algebraiques possibles en una equació donant peu així a una nova logística anomenada per ell mateix «logística speciosa» en la que el que es compara són magnituds.

Alexander Anderson, amic personal de Viète, publica al 1615 en un volum dues memòries pòstumes de Viète titulades *De aequationem recognitione* i *De aequationem emendatione*. Per exemple mètodes que transformen una equació biquadrada en una cúbica, o un nou mètode per resoldre les equacions cúbiques. Posarem esment en un resultat que creiem més interessant que els altres: Viète troba una manera de reduir el grau d'una equació cúbica una vegada es coneix una arrel. Ell mateix exposa un exemple:

Sigui l'equació cúbica

$$\frac{BA - A^3}{3} = Z \quad (1)$$

i imposem que E complexi

$$E - Z = BE \quad (2)$$

(dit d'una altre manera $-E$ és arrel; notem però que Viète no admet solucions negatives).

De (1) i (2) obtenim

$$\begin{aligned} A^3 + E^3 &= B(A + E) \\ (A + E)(A^2 - AE + E^2) &= B(A + E) \end{aligned}$$

i si dividim per $(A + E)$ els dos membres de la igualtat ens queda una equació quadràtica

$$A^2 - AE + E^2 = B$$

Tot i que Viète segurament no n'era del tot conscient, podríem dir que aquest resultat és un primer pas cap a la descomposició d'un polinomi en factors primers i també cap a la relació entre el nombre d'arrels i el grau d'una equació.

Viète coneixia algunes relacions entre les arrels i els coeficients d'una equació algebraica, però va tenir greus dificultats per generalitzar els resultats obtinguts en no admetre ni coeficients ni arrels negatives.

Va ser el flamenc Albert Girard (1590-1639) qui el 1629, amb el seu llibre *Invention nouvelle en l'algèbre*, troba la relació entre arrels i coeficients en admetre arrels de nombres negatius i solucions negatives. Girard va ser el primer en enunciar el Teorema Fonamental de l'Àlgebra: tota equació té tantes arrels com indica el grau.

Girard, doncs, admetia les solucions imaginàries, però no perquè reconeguéss una nova estructura de nombres sinó perquè aquests donaven sentit als principis generals de la formació d'una equació a partir de les seves arrels.

Un altre resultat enunciat en el seu llibre és la resolució completa de l'equació cúbica irreductible mitjançant la trisecció de l'angle.

D'altres matemàtics com Stevin o Harriot contribueixen a la millora de la simbologia algebraica, però no fou fins Descartes quan apareix la notació pràcticament com la coneixem ara: utilitza lletres minúscules (les primeras de l'abecedari per denotar quantitats conegudes i les últimes per representar quantitats desconegudes), notació exponencial (presa de Stevin i Chuquet), el símbol ∞ per denotar una igualtat...

La contribució més gran de Descartes és el naixement de la geometria analítica o la unificació de l'àlgebra i la geometria, però nosaltres només tractarem aquells aspectes treballats per ell que fan referència al camp dels nombres complexos.

Abans, però, anem a veure quatre pinzellades de la seva vida i de la seva concepció de la matemàtica.

Era fill d'una família noble establerta des del segle XIV a la Turena meridional.

El seu pare, conseller al Parlament de Bretanya, era un home força ric. Descartes va heretar, doncs, diners suficients per poder mantenir una vida d'estudis i viatges.

Entre 1604 i 1616 va anar al col·legi de jesuïtes de la Flèche, on va rebre una sòlida formació en matemàtiques i humanitats i més tard es va llicenciar en dret a Poitiers.

Desitjós de conèixer món, el 1618 comença un llarg període de viatges; primer com a soldat i després com a particular.

Per assegurar-se una vida tranquil·la de meditació i estudi, el 1628 es retira a Holanda, on va romandre més de vint anys dedicat a la ciència i a la filosofia. La llibertat de pensament de què va gaudir en l'elaboració dels seus treballs era característica de l'Holanda del segle XVII. El van molestar poc els protestants, ja que l'ambaixador francès i el Príncep d'Orange el van protegir. En una ocasió es va prohibir vendre les seves obres i va haver de respondre davant els magistrats d'acusacions fetes per teòlegs d'Utrecht i Leyden.

La seva contribució a la matemàtica ha tingut gran importància. Se l'ha considerat l'inventor de la geometria analítica, encara que aquest fet és poc clar. De fet, l'estudi de corbes mitjançant les seves equacions, definit com «l'essència» de la geometria analítica, ja era conegut pels grecs i constituïa la base dels seus estudis sobre seccions còniques. I entre d'altres predecessors de Descartes cal considerar el francès Nicolau d'Oresme, que va inventar un sistema de longituds i latituds; François Viète, que va introduir grans avenços en la notació simbòlica, els quals van permetre grans progressos en l'àlgebra; i finalment el seu contemporani Fermat.

La troballa consistent a trobar la posició d'un punt en el pla assignant-li dos nombres (coordenades), es deu completament a Descartes.

El 1637 Descartes va publicar la seva obra *La Geometria* com un apèndix al *Discours de la méthode*, que recull les seves aportacions més importants a les matemàtiques i que acaba amb el següent paràgraf:

«Espero que la posteritat em jutgi amb benevolència, no solament per les coses que he explicat, sinó també per les que he omès intencionadament per tal de deixar als altres el plaer de descobrir-les.»

Podríem dir que tota l'obra de Descartes va encaminada a realitzar una física general, capaç d'explicar completament tot el que hi ha a l'univers, a la terra i al cel, i amb *Principi de la filosofia*, de 1644, creu haver assolit el seu propòsit.

Descartes considera que la matemàtica no té una finalitat en si mateixa, sinó que se'n servirà per assajar el seu mètode exposat en *Discurs del mètode* per conduir bé la raó i buscar la veritat en les ciències.

En canvi sí que veurà important el mètode matemàtic de la demostració com a raonament perquè amb la seva pràctica no espera altra cosa que «acostumar a la ment de nodrir-se de veritats i no satisfer-se amb falses raons».

No és d'estranyar doncs que alguns dels seus resultats no vagin acompanyats de la demostració formal ja que mostra molt poc interès per les qüestions tècniques i formals de la matemàtica.

L'únic escrit matemàtic de Descartes és *Geométrie*, abans esmentada. El llibre tercer de la *Geométrie* és un tractat d'àlgebra. Fem un breu resum dels principis exposats:

1. «... A cada equació hi pot haver tantes arrels com dimensions tingui la magnitud desconeguda..., així, per exemple, si se suposa que x igual a 2, o bé $x - 2$ igual a res, i $x - 3 = 0$, multiplicant aquestes dues equacions $x - 2 = 0$ i $x - 3 = 0$ entre si, es tindrà $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Però passa sovint que algunes d'aquestes arrels són falses o menors que res; si se suposa que es designa també el defecte d'una quantitat que sigui 5, es té $x + 5 = 0$...»

2. «... Es veu aleshores, evidentment, que la suma d'una equació que conté vàries arrels pot ser sempre dividida per un binomi compost de la quantitat desconeguda menys el valor d'una de les arrels veritables qualsevol que sigui aquesta, o més el valor d'una de les falses i així es disminueixen respectivament les seves dimensions...»

3. «... Es veu també quantes arrels veritables i quantes de falses hi pot haver a cada equació, a saber, poden haver-n'hi tantes de veritables com vegades s'hi trobin canviats els signes $+$ i $-$; i també tantes de falses com vegades s'hi segueixen dos signes $+$ o dos signes $-$.»

4. «... És fàcil d'aconseguir en una mateixa equació que totes les arrels que eren falses es converteixin en veritables, i pel mateix procediment que totes les que eren veritables es converteixin en falses, a saber, canviant tots el signes $+$ o $-$ que es trobin en els llocs parells... I si, sense conèixer el valor de les arrels d'una equació, es vol augmentar o disminuir alguna quantitat coneguda, n'hi ha prou en suposar en lloc del terme desconegut un altre que sigui més o menys gran que aquesta mateixa quantitat, i substituir-lo a tot arreu en lloc del primer.»

5. «... Ara bé, per aquest mètode de canviar el valor de les arrels sense conèixer-les poden fer-se dues coses que tenen certa utilitat més endavant. La primera és que es pot sempre treure el segon terme de l'equació que s'examina...»

6. «... La segona... és que augmentant el valor de les arrels veritables en una quantitat que sigui més gran que qualsevol de les falses es pot aconseguir que totes les arrels siguin veritables, de tal manera que no hi hagi dos signes $+$ o dos signes $-$ que se segueixin i a més que la quantitat coneguda del tercer terme sigui més gran que el quadrat de la meitat del segon...»

7. «A més, sense conèixer el valor de les arrels veritables d'una equació, es poden dividir totes per la quantitat coneguda que hom vulgui... I això pot servir per reduir les fraccions a nombres enters racionals, i sovint també els nombres sords que es trobin en els termes de les equacions...»

8. «A més, ni les arrels veritables ni les falses són sempre totes reals, sinó que algunes vegades són imaginàries, és a dir, que sempre es poden imaginar en cada equació tantes arrels com hem dit, però sense que hi hagi sempre una quantitat que correspongui a les arrels que s'han imaginat; com també se'n poden imaginar tres en aquesta:

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

no n'hi ha però, més que una de real, que és 2, i respecte de les altres dues, encara que s'augmentin, disminuïxin o multipliquin de la manera que acabo d'explicar, és impossible de fer que deixin de ser imaginàries.

Ressaltem d'aquestes notes tres aspectes que ens semblen interessants:

— Utilitza encara la terminologia d'arrels veritables o falses segons siguin positives o negatives.

— Domina tota la tècnica de canvis de signe de les arrels i la descomposició de polinomis.

— Utilitza el nom d'arrel imaginària per denotar les arrels complexes i veu que essencialment són diferents de les reals: «Encara que s'augmentin o disminuïxin o multipliquin de la manera que acabo d'explicar és impossible fer que deixin de ser essencialment imaginàries».

3. Segles XVII i XVIII: Un període definitiu per als nombres complexos

Després que quasi bé durant un segle els nombres complexos fossin pràcticament oblidats, les contribucions de Leibnitz, Johann Bernoulli, De Moivre, Euler i Gauss acabaran per donar significat rigorós als nombres complexos.

Podríem dir que l'últim exponent d'aquesta despreocupació fou Isaac Newton, que considerava les arrels complexes com elements sense significat físic, és a dir, hi ha problemes que no tenen solució física o geomètrica però sí que en tenen de complexa.

3.0. John Wallis: Primer intent de representació geomètrica

John Wallis (1616-1703) pot ser considerat el més important dels matemàtics anglesos immediatament anteriors a Newton. Estudià a Cambridge i al 1649 fou nomenat savilian professor de geometria a Oxford, ocupant la càtedra creada al 1619 perquè l'ocupés Briggs. Era membre de número de la Real Society, que havia contribuït a organitzar. Anteriorment, al 1655, havia publicat dos llibres molt importants, un sobre geometria analítica i l'altre sobre «anàlisi dels infinits».

A la seva *Àlgebra*, Wallis mostrà com representar geomètricament les arrels complexes de les equacions quadràtiques amb coeficients reals. Per a ell els nombres complexos no són més absurds que els nombres negatius i si els segons poden ser representats en una línia amb direcció, aleshores els nombres complexos poden ser representats en el pla. El mètode de representació era el següent: començava amb un eix en el qual els nombres reals estaven senyalats en relació a l'origen; la distància a l'origen sobre l'eix representa la part real de l'arrel. La distància és mesurada en la direcció positiva o negativa de l'eix d'acord amb si la part real de l'arrel és positiva o negativa. Des del punt determinat a l'eix real escollit abans, dibuixava una línia perpendicular a l'eix dels reals, la llargada de la qual representa el nombre pel qual és multiplicat $-i$; la direcció de la línia ha d'estar d'acord amb si el nombre que acompanya $-i$ és positiu o negatiu. Cal fer notar que Wallis no introdueix explícitament l'eix imaginari en la seva construcció. D'aquesta manera, però, dóna una construcció geomètrica de les arrels de segon grau, tant si les arrels són reals com complexes. Llastimosament, tot i que el seu treball fou correcte, li mancà potser la inter-

pretació geomètrica de les operacions amb complexos i a més que no tingué un gran ressò en la seva època.

3.1. Leibnitz i Bernoulli

Encara que no tant conegudes, Leibnitz va fer contribucions en el camp dels nombres complexos.

Alguns historiadors l'han considerat el millor matemàtic pur alemany del segle XVII.

Va néixer a Leipzig el mes de juny de 1646. De petit va mostrar una gran habilitat per a les matemàtiques i abans dels vint anys ja havia llegit els tractats més importants d'aquell temps.

Va estudiar dret a Nuremberg, va entrar a la carrera diplomàtica i va viatjar molt, la qual cosa li va permetre entrar en contacte amb els millors matemàtics holandesos, francesos i anglesos.

Conseller de l'elector de Magúncia (1672), va ser enviat a París, on va residir durant quatre anys decisius per a la seva formació. Sis anys abans, però, quan aspirava a la plaça de professor de filosofia de Leipzig, ja va publicar una *Dissertatio de arte combinatoria*, inspirada en l'*Ars magna* de Llull.

Es va relacionar també amb el cercle lullista de Magúncia i va ser amic de Buchels, col·laborador de Salzinger en l'edició maguntina de les obres de Llull.

Finalment va ser bibliotecari i historiògraf dels ducs de Hannover. Va viatjar per tot Alemanya i Itàlia i encara avui és pot visitar la seva casa de Hannover, convertida en museu, on va morir el 14 de novembre de 1716.

Leibnitz va contribuir al progrés de les matemàtiques amb un descobriment decisiu: el càlcul diferencial i integral, cosa que ja havia fet poc abans Newton. Però Leibnitz, que ignorava el precedent newtonià, va utilitzar una notació més clara i va insistir més en els aspectes geomètrics.

Els treballs on donava a conèixer els seus descobriments, *Nova methodus pro maximis et minimis* i *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, van ser publicats els anys 1684 i 1686 a la seva revista de Leipzig *Acta Eruditorum*.

Mentre els seus deixebles del continent, els germans Bernoulli i G. de L'Hôpital, contribuïren a estendre el seu mètode i la seva fama per Europa, els amics de Newton l'acusaven de plagiar a Anglaterra. Investigacions fetes modernament l'han absolt d'aquesta greu acusació.

L'interès pels nombres complexos fou degut a l'estudi que va fer de l'*Àlgebra* de Bombelli. Considerava falsa l'afirmació que la fórmula de Cardano per a equacions cúbiques era inadequada per al cas «irreductible».

Va intentar demostrar que:

1. Tota equació cúbica pot resoldre's per mitjà de la fórmula de Cardano.
2. Les arrels de totes les potències parelles poden escriure's de manera que continguin les imaginàries, que de fet són reals.

Demostrant l'apartat 2 va trobar el següent resultat aparentment estrany obtingut mitjançant una analogia amb l'estudi algebraic de les corbes de segon grau:

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$$

Leibnitz, gran teòleg, reflectint el pensament de l'època, veié en els nombres imaginaris quelcom més que una construcció de les matemàtiques. Referint-s'hi diu: «Un recurs elegant i meravellós per a la intel·ligència humana, un naixement contra natura en el camp del pensament, quasi bé un amfibi entre el ser i el no ser».

La contribució més gran de Leibnitz en el terreny del nombre complex va ser feta conjuntament amb Johann Bernoulli i deguda a la correspondència que mantingueren. Ens referim a tota la discussió sobre l'existència o no dels logaritmes de nombres complexos. Per primer cop el nombre complex passa la frontera de l'àlgebra (fins ara només eren «útils» per donar sentit al que ara coneixem com teorema fonamental de l'àlgebra tal i com deia Girard) al nou món del càlcul.

3.2. El naixement dels logaritmes complexos

El mètode bàsic d'integració introduït per Newton tant per funcions algebraïques complicades com per funcions transcendents era el de representar les funcions com a sèries i integrar terme a terme.

Al segle XVIII s'utilitzava un concepte d'integral limitat. Newton utilitzà la derivada i l'antiderivada o la integral indefinida, mentre que Leibnitz posà èmfasi al concepte de diferencial i suma de diferencial. Johann Bernoulli, segurament seguint Leibnitz, tractà la integral com la inversa de la diferencial. Això és, $dy = f(x)dx \Rightarrow y = f(x)$.

De fet els matemàtics del segle XVIII tractaren la integral o bé com la inversa de la derivada o com la inversa de la diferencial dy . L'existència d'una integral mai no va ser qüestionada; era, per suposat, trobada explícitament en la majoria d'aplicacions fetes al segle XVIII. Per tant no se'ls va ocórrer la possibilitat de la no existència d'una primitiva.

Per avaluar

$$\int \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx$$

Jackob Bernoulli va utilitzar el canvi de variable

$$x = a \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$$

que converteix la integral en

$$\int \frac{dt}{2at}$$

que és realment integrable i igual al logaritme d'una funció.

Johann Bernoulli al 1702 publica a *Memories de l'Acadèmia de Ciències* la següent observació:

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right)$$

que és el mètode d'integració per fraccions parcials. Aquest mètode fou desenvolupat independentment per Leibnitz a *Acta Eruditorum* el 1702. (En aquest treball Leibnitz descomposa $x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})$. Tot i trobar aquesta expressió sembla que Leibnitz no va ser capaç d'extreure arrels quadrades de nombres complexos.)

En una carta entre Johann Bernoulli i Leibnitz, el mètode fou aplicat a

$$\int \frac{dx}{a^2x^2 + bx + c}$$

on $a^2x^2 + bx + c$ pot tenir les arrels complexes. El mètode de fraccions parcials dóna integrals de la forma

$$\int \frac{dx}{cx + d}$$

on d pot ser un nombre complex. Tant Leibnitz com Bernoulli utilitzaven igualment la regla del logaritme per integrar, i així van sorgir els logaritmes de nombres complexos.

Malgrat la confusió que encara hi havia sobre els nombres complexos ningú no va dubtar a integrar d'aquesta manera. Leibnitz va dir que la presència de nombres complexos en la integració no feia cap mal.

Johann Bernoulli els utilitzà repetidament. En una publicació de l'any 1702 assenyalà que si fem el canvi $z = b(t - 1)/(t + 1)$ a

$$\int \frac{a \, dz}{b^2 - z^2} \quad \text{obtenim} \quad \int \frac{a \, dt}{2bt}$$

i si fem el canvi $z = \sqrt{-1} \cdot b(t - 1)/(t + 1)$ a la integral:

$$(1) \quad \int \frac{dz}{b^2 + z^2} \quad \text{ens queda} \quad \int \frac{-dt}{\sqrt{-1} \, 2bt}$$

que és la diferencial del logaritme d'un nombre imaginari.

De la integral original (1) s'obté la funció arctg, i així Bernoulli tingué establerta la relació entre funcions logarítmiques i trigonomètriques.

Aquests resultats provocaren una discussió sobre la naturalesa dels logaritmes

de nombres complexos i negatius. En un article de 1712 i en un intercanvi de cartes amb Johann Bernoulli durant 1712-1713 Leibnitz afirma que els logaritmes de nombres negatius no poden existir (ell diu imaginaris), mentre que Bernoulli buscà una prova que demostrés que eren reals. L'argument exposat per Leibnitz es basava en què els logaritmes de nombres més grans que 1 són positius mentre que el logaritme de nombres entre 0 i 1 són negatius o zero. Per tant no poden existir els logaritmes de nombres negatius, i acaba dient: a més, si hi ha el $\log(-1)$ aleshores $\log \sqrt{-1} = (1/2) \log(-1)$ però segurament no existeix $\log \sqrt{-1}$. Sembla inexplicable que Leibnitz argumenti així després d'haver introduït els logaritmes de nombres complexos en la integració.

Mentrestant Bernoulli argumentà que $\log(-1) = 0$ de la següent manera:

$$(2) \quad \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

aleshores $\log(-x) = \log(x)$, i així arribem a la conclusió que $\log 1 = 0 = \log(-1)$.

Leibnitz no tarda en respondre-li que $d(\log x) = \frac{dx}{x}$ només en el cas que x sigui positiva.

3.3. Abraham de Moivre

Paral·lelament a la discussió sobre l'existència del logaritme d'un nombre complex, Abraham de Moivre obtingué la fórmula anomenada actualment amb el seu nom.

Fill d'un cirurgià protestant, va néixer a Vitry (França) el 26 de maig de 1667. Als onze anys el van enviar a la universitat protestant de Sedan. Allà va caure a les seves mans un exemplar de l'*Aritmetique* de Legendre que va estudiar amb una gran afeció i d'amagat del professor de grec amb qui vivia, el qual pretenia que aquell noi tan prometedor dediqués tot el seu temps a estudiar els clàssics.

Quan el 1681 es va tancar la universitat de Sedan, De Moivre va anar a estudiar física a París. En un viatge que des de París va fer a Borgonya va conèixer els treballs de Rohaut sobre trigonometria i mecànica. En aquella època va començar a estudiar matemàtiques i física amb Ozanam (1640-1717), un autodidacte especialment dotat per a ensenyar els altres. Cap als divuit anys, De Moivre va deixar el seu país natal i se'n va anar a Londres.

Sembla que el primer matemàtic anglès amb qui va establir amistat va ser l'astrònom Edmund Halley, l'any 1692. Halley va presentar el primer treball matemàtic de De Moivre a la Royal Society el 1697. El títol del treball era *Specimen* i es tractava d'una ampliació de la teoria newtoniana de les fluxions.

Dos anys més tard, quan en tenia 30, va ser elegit membre de la dita societat arran del treball *A method of raising an infinite Multinomial to any given Power or extracting any given Root of the same*, apadrinat per James Dotson.

Les cartes de De Moivre als Bernoulli són plenes de referències a Halley i a New-

ton. Aquest darrer va ser elegit president de la Royal Society el 1703; s'havia traslladat a viure a Londres des de Cambridge una mica abans, i sembla que després de la jornada de treball Newton i De Moivre es trobaven a casa del primer on mantenien discussions filosòfiques fins a altes hores de la matinada.

Arran de la famosa controvèrsia entre Newton i Leibnitz sobre la invenció del càlcul, la Royal Society va formar una comissió per investigar les reclamacions que feien aquests dos grans matemàtics, i De Moivre en va formar part. La seva amistat amb Newton era coneguda, però en les seves cartes havia deixat clara moltes vegades la seva admiració per Leibnitz.

Després que Philip Nandé (1684-1717) va presentar la *Miscellanea Analytica* (1730) a l'acadèmia de Berlín, De Moivre va ser elegit membre d'aquesta societat per aclamació. La seva elecció per l'Académie des Sciences de París va tenir lloc l'any 1745, uns mesos abans de la seva mort.

Anem a veure com va deduir la seva fórmula:

En una nota de 1722, que utilitza els resultats publicats al 1707, ell diu que hom pot obtenir una relació entre x i t que representi el «sinus versus» (sin versus $z = 1 - \cos z$) de dos arcs que estiguin en relació de i a n per eliminació de z entre les dues equacions:

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t \quad \text{i} \quad 1 - 2z + z^2 = -2zx$$

En aquest resultat de De Moivre, la fórmula és implícita, ja que si fem

$$x = 1 - \cos u \quad \text{i} \quad t = 1 - \cos nu$$

es dedueix que:

$$(\cos u \pm \sqrt{-1} \sin u)^n = \cos nu \pm \sqrt{-1} \sin nu$$

Per De Moivre n era un enter positiu. Realment ell mateix escrigué aquest últim resultat explícitament. La formulació final la va fer Euler i a més la va generalitzar a tot real n .

En la mateixa memòria del 1707 es troba la fórmula que expressa el sinus en termes de nombres complexos:

$$\sin x = (1/2) (\sin nx + \sqrt{-1} \cdot \cos nx)^{1/n} + (1/2) (\sin nx - \sqrt{-1} \cdot \cos nx)^{1/n}$$

Al 1730 obté la següent fórmula:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^{1/n} = \cos \frac{2k\pi \pm x}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2k\pi \pm x}{n}$$

que li serveix per descomposar

$$y^{2n} + 2y \cos nx + 1$$

en factors quadràtics de la forma

$$y^2 + 2y \cos y + 1$$

Finalment, el 1739 mostrà que l'arrel n -èssima d'un «impossible binòmic» $a + \sqrt{-b}$ s'efectua com ho fem actualment.

3.4. Leonhard Euler

Podríem dir que Euler és la figura més representativa del període algorítmic en que havia entrat la matemàtica en el segle XVIII. En aquest segle l'anàlisi s'independitza de la geometria i la ciència natural, és a dir, es fan estudis d'anàlisi per la importància d'ella mateixa sense cap correspondència amb investigacions de fenòmens naturals. No és d'estranyar doncs que Euler s'esforcés a trobar una definició pels logaritmes de nombres complexos o trobar una relació entre les funcions transcendents i els nombres complexos.

Fill d'un clergue que vivia prop de Basilea, va manifestar des de petit un talent natural per a les matemàtiques. Va ser enviat de molt jove a la Universitat de Basilea on va atreure l'atenció de Johann Bernoulli i als 17 anys es va doctorar. El seu pare volia que seguís els seus passos i va orientar el seu fill cap a l'estudi de la teologia, però va abandonar la idea quan va veure que el talent de Leonhard anava en una altra direcció.

L'any 1727 va deixar el seu país natal i va anar a Petersburg on va ser professor de física (1730) i de matemàtiques (1733) a l'Acadèmia de Ciències de Rússia. Nomenat per Frederic el Gran director de la secció de matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències de Berlín, Caterina II el va nomenar director de l'Acadèmia de Petersburg (1766). Va ser també membre de la Royal Society (1746) i de l'Académie Française des Sciences (1755).

Quan tenia aproximadament seixanta anys es va quedar cec, però els seus deixebles i fills van copiar la seva obra, escrivint les seves memòries exactament com els les dictava Euler. L'any 1711 hi va haver un gran foc a la ciutat, arribant fins a la seva casa: un compatriota seu el va salvar i, encara que es perderen els llibres i mobles, també es pogueren salvar els seus escrits. Euler va continuar el seu treball durant dotze anys més fins el dia de la seva mort als 76 anys d'edat.

Entre moltes altres coses, Euler va introduir la notació de $f(x)$, el nombre π , el nombre e com base de logaritmes, la i per representar la unitat imaginària i el símbol Σ per la suma. Va estudiar les transformacions de coordenades i va fer nombrosos treballs en el càlcul diferencial i integral. Va definir termes com centre de gravetat, moment d'inèrcia, etc., i va estudiar el moviment d'un cos amb un punt fix en funció de les forces aplicades. Va aplicar també el càlcul matemàtic a l'astronomia.

Va escriure nombrosos treballs sobre matemàtiques i física, d'entre els quals destaquen *Introductio in analysim infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) i *Dioptrica* (1767).

3.4a. Clarificació sobre el logaritme d'un nombre complex

En una correspondència establerta entre Euler i Johann Bernoulli entre 1727 i 1731 es torna a tractar el problema de l'existència o no del logaritme d'un nombre complex. Bernoulli mantingué la seva posició mentre que Euler, en desacord amb ell, no tenia encara una posició consistent.

En una carta a Johann Bernoulli del 18 d'octubre de 1740, Euler diu que

$$y = 2 \cos x \quad \text{i} \quad y = e^{\sqrt{-1} \cdot x} + e^{-\sqrt{-1} \cdot x}$$

són solucions d'una mateixa equació diferencial i per tant han de ser iguals. Aquesta observació fou publicada al 1743:

$$\cos z = \frac{e^{\sqrt{-1} \cdot z} + e^{-\sqrt{-1} \cdot z}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{\sqrt{-1} \cdot z} - e^{-\sqrt{-1} \cdot z}}{2\sqrt{-1}}$$

Així donà una relació entre funcions trascendentals i els nombres complexos. Cal dir que Roges Côtes el 1714 ja va publicar un resultat semblant.

En un article de 1749 titulat «De la controvèrsia entre Leibnitz i Bernoulli sobre els logaritmes negatius i imaginaris», Euler discrepa contra els arguments de Leibnitz que $d(\log x) = dx/x$ només si x és positiu. Ell diu que l'objecció de Leibnitz, si és correcta, trenca els fonaments de tot l'anàlisi, és a dir, les regles i operacions haurien de ser independents de la naturalesa dels objectes als quals estan aplicades. Afirmar que $d(\log x) = dx/x$ és correcte per x positius i negatius però afegeix que Bernoulli oblida que en la conclusió de la fórmula (2) $\log(-x) = \log x$ difereixen en una constant. Aquesta constant pot ser $\log(-1)$ ja que

$$\log(-x) = \log(-1x) = \log(-1) + \log x$$

D'aquí es dedueix, diu Euler, que Bernoulli ha suposat de fet que $\log(-1) = 0$ però això s'ha de provar. Bernoulli va donar altres arguments que Euler també qüestionà. Per exemple, Bernoulli argumenta que si

$$(-a)^2 = a^2, \text{ aleshores } \log(-a)^2 = \log a^2 \text{ i } 2 \log(-a) = 2 \log a, \text{ i per tant } \log a = \log(-a).$$

Euler rebut l'argument de la següent manera:

Si $(a\sqrt{-1})^4 = a$ aleshores $\log(a\sqrt{-1}) = \log(a) + \log(-1)$ i d'aquí es dedueix que $\log(-1) = 0$. Però el mateix Bernoulli ha provat que $\log \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \pi/2$.

Euler també rebut els arguments de Leibnitz, per demostrar que $\log(-1)$ no existeix, dóna el següent raonament

$$\log(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 - (1/4)x^4 + \dots$$

si fem $x = -2$

$$\log(-1) = -2 - (4/2) - (8/3) - \dots$$

d'on veu que $\log(-1)$ no pot ser 0. (Leibnitz creu que $\log(-1)$ no existeix.) Euler respon amb el següent argument:

Sabem que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots$$

Per a $x = -3$

$$-(1/2) = 1 + 3 + 9 + \dots$$

Per a $x = 1$

$$1/2 = 1 - 1 + 1 - \dots$$

si sumen s'obté

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \dots$$

D'aquesta manera Euler veu que els arguments de sèries no proven res.

Després de refutar Leibnitz i Bernoulli, dona el següent argument per trobar la definició del logaritme d'un nombre complex.

Considera

$$x = e^y = (1 + (y/i))^i$$

(en els primers treballs Euler utilitza i (inicial de infinitus) per designar una quantitat infinitament gran. Després de 1777 utilitza i per designar $\sqrt{-1}$).

Aleshores:

$$\begin{aligned} x^{(1/i)} &= 1 + y/i \\ y &= i(x^{(1/i)} - 1) \end{aligned}$$

Així $x^{(1/i)}$, «l'arrel que té un exponent infinitament gran», té infinits valors complexos y i si fem $y = \log x$, aleshores $\log x$ té infinits valors.

De fet Euler ara escriu:

$$x = a + b \sqrt{-1} = c (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$$

prenent $c = e^c$

$$x = e^c (\cos z + \sqrt{-1} \sin z) = e^c e^{\sqrt{-1} (z \pm 2n\pi)}$$

i per tant

$$y = \log x = c + (z + 2n) - 1$$

on n és un enter positiu o zero. Aleshores Euler afirma: per un nombre real positiu només un valor del logaritme és real i els altres són tots imaginaris, i per un valor negatiu o imaginari tots els valors del logaritme són imaginaris.

Malgrat aquesta solució exitosa del problema el treball d'Euler no fou acceptat.

3.4b. Estructura profunda dels nombres complexos

Euler també va intentar entendre l'estructura profunda dels nombres complexos. En el seu *Vollständige Anleitung zur Algebra* (introducció completa a l'àlgebra) que apareix a Rússia el 1768-1769 i a Alemanya el 1770, considerat el millor text d'àlgebra del segle XVIII, diu:

«Com que tots els nombres concebibles són o més grans que zero o més petits que zero o iguals a zero aleshores és clar que l'arrel d'un nombre negatiu no pot ser inclòs entre els nombres possibles (els reals). Conseqüentment haurem de dir que aquests són nombres impossibles. Aquestes circumstàncies ens porten a anomenar-los imaginaris perquè només poden existir en la imaginació.»

Tot i que Euler buscà el formalitzar els nombres complexos també cometé errors bàsics com el que hi ha en la seva *Àlgebra*:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2 \text{ utilitzant la propietat } \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Tot i anomenar als nombres complexos nombres impossibles, sap que són útils. Els utilitzava per exemple quan abordava problemes on no sabia si hi havia resposta factible o no. Així si es preguntava com separar 12 en 2 parts el producte de les quals sigui 40 trobà per solucions $6 + \sqrt{-4}$ i $6 - \sqrt{-4}$. D'aquesta manera reconeixia que el problema no pot ser solucionat.

3.5. D'Alembert

D'Alembert, contemporani d'Euler, hi mantingué una freqüent correspondència, discutint temes com el dels logaritmes de nombres negatius que al final Euler resolgué.

D'Alembert (1717-1783) fou el matemàtic francès més important de la segona meitat del segle XVIII. Va rebre una sòlida educació en dret, medicina, ciències naturals i matemàtiques. Col·laborà amb Diderot des de 1751 fins 1772 en el 28 volums de la famosa *Encyclopédie o Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. D'Alembert escrigué per la *Encyclopédie* el molt admirat «Discours Préliminaire», així com també la majoria dels articles matemàtics i científics en general.

A l'edat de 24 anys fou escollit membre de la Académie des Sciences i en el 1754 arribà a ser el seu Secrétaire Perpetuel i com a tal el científic potser més influent de França.

D'Alembert va invertir molt temps i esforç intentant demostrar el teorema que havia conjecturat Girard i que coneixem avui amb el nom de Teorema Fonamental de l'Àlgebra (tota equació polinòmica $f(x) = 0$ amb coeficients complexos i de grau $n \geq 1$ té com a mínim una arrel complexa). Els esforços per demostrar aquest teorema es veuen en el seu treball «Réflexions sur la cause générale des vents» que publicaren les *Memoirs* de l'Acadèmia de Berlin corresponents a l'any 1746. Si considerem la solució d'una tal equació polinòmica com una generalització de les operacions algebraiques explícites, podem dir que allò que D'Alembert volia demostrar essencialment era que el resultat de qualsevol operació algebraica efectuada sobre un nombre complex té com a resultat un altre nombre complex.

Això estava en contradicció amb el pensament de la majoria dels matemàtics de començaments de segle XVIII que creien que diferents arrels de nombres complexos introduïrien altres tipus de nombres.

D'Alembert afirma que qualsevol expressió construïda a partir de nombres complexos fent operacions algebraiques (fins i tot arrels i potències) es pot escriure

com un nombre complex, és a dir de la forma $A + B\sqrt{-1}$. L'única dificultat que té per demostrar aquesta afirmació és el cas de $(a + bi)^{g+hi}$. Aquesta demostració va ser millorada per Euler, Lagrange i d'altres. A l'*Encyclopédie*, D'Alembert manté un silenci discret sobre els nombres complexos.

3.6. Representació geomètrica: Wessel i Argand

Durant el segle XVIII els nombres imaginaris foren introduïts en moltes àrees de les matemàtiques, particularment en aquelles relacionades amb el càlcul. Fins i tot eren utilitzats en arguments matemàtics de les demostracions. Cal tenir en compte, però, que encara que els resultats que obtenien eren correctes, tenien seriosos dubtes de la validesa d'aquests arguments. Els matemàtics encara no havien comprès el significat d'aquests nombres.

Una preocupació característica era la necessitat que tenien d'una interpretació dels nombres complexos.

Un important episodi, en l'acceptació dels nombres imaginaris, fou el desenvolupament del model geomètric que representa els complexos i les seves operacions protagonitzat per Wessel, Argand i Gauss.

Anteriorment, alguns matemàtics —Cotes, De Moivre, Euler i Vandermonde— ja pensaven els nombres complexos com a punts del pla. A partir d'aquí, van intentar resoldre l'equació

$$x^n = 1$$

i trobaren les solucions:

$$\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n$$

que es poden interpretar com els vèrtexs d'un polígon regular de n costats.

Euler, per exemple, canvia x i y , que geomètricament visualitza com les coordenades d'un punt del pla, per $x + iy$ i després el representa per $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, anomenant coordenades polars a r i α .

Així doncs, abans del 1800 ja es tenia una representació geomètrica dels nombres complexos, però no de les seves operacions.

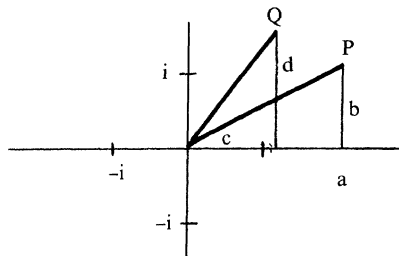
Caspar Wessel (1795-1818), un topògraf danès i gran matemàtic autodidacte, escriu el 1797 un article titulat «On the Analytic Representation of Direction; an Attempt», que fou publicat el 1799 a la Real Academie d'Alemanya.

Wessel busca una representació geomètrica dels nombres complexos i de les seves operacions, considerant-los com a segments amb direcció (fins ara es consideraven únicament com a punts del pla).

En l'article abans esmentat considera un eix horitzontal amb unitat el nombre real 1 i afegeix un eix vertical amb $\sqrt{-1}$ com a unitat.

Amb la representació geomètrica de Wessel el vector OP representa el nombre complex $a + \sqrt{-1} b$.

Wessel defineix les operacions amb vectors per definir les operacions de nombres complexos en termes geomètrics. Les seves definicions de les 4 operacions són

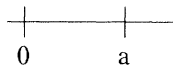


pràcticament les actuals. Així la suma de $a + bi$ i $c + di$ és la diagonal del paral·lelogram determinat pels costats adjacents OP i OQ . El producte de $a + bi$ per $c + di$ és un nou vector OR de longitud el producte de les longituds de OP i OQ i formant un angle amb l'eix x igual a la suma dels angles que formen OP i OQ .

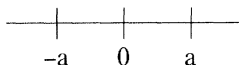
Aplica aquesta representació geomètrica de vectors a altres problemes d'àlgebra, geometria i trigonometria. Malgrat els grans mèrits dels resultats de Wessel, aquests no foren coneguts fins al 1897 (100 anys després) quan foren publicats traduïts al francès.

Una altra representació geomètrica dels nombres complexos fou donada pel suís Jean-Robert Argand (1768-1822). Argand publicà un petit llibre, *Assaig sobre una manera de representar les quantitats imaginàries i les construccions geomètriques* (1806). Argand observa que els nombres negatius són una espècie d'extensió dels nombres positius que resulta de combinar direcció i magnitud.

Comença considerant operacions amb un segment de longitud a situat sobre l'eix x .



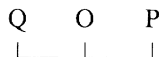
invertint la direcció de a respecte 0, que pot ser interpretat com multiplicar per -1 , obtenim $-a$. Així establim els punts a i $-a$.



Així multiplicar per -1 és equivalent a fer una rotació de 180° . Multiplicant per -1 una altra vegada (fer una altra rotació de 180°) tornem a tenir a .

Argand es pregunta: Podem estendre el sistema de nombres reals afegint algun nou concepte?

Per respondre a aquesta pregunta considera la seqüència $1, x, -1$, vol saber si podrem trobar una operació que transformi 1 en x i repetint el procés sobre x obtinguem -1 . Si fem una rotació al voltant de 0 de 90° i repetim aquesta rotació anem de P a Q .



Notem que això és el que succeeix quan multipliquem 1 per $\sqrt{-1}$, i si multipliquem aquest producte per $\sqrt{-1}$ obtenim -1 (1 fora P i -1 fora Q).

Per tant podem pensar $\sqrt{-1}$ com una rotació de 90° en el sentit contrari de les agulles del rellotge.

Utilitzant el sentit operacional dels nombres complexos Argand decideix que el segment lineal OB , que surt de l'origen i anomena línia amb direcció, pot ser representat com:

$$r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

on r és la llargada del segment i α l'angle amb l'eix x .

Argand, com Wessel, mostra com els nombres complexos poden ser sumats i multiplicats geomètricament i aplica aquestes idees geomètriques per provar teoremes d'àlgebra, geometria o trigonometria.

Aquestes representacions geomètriques no aconseguiren la total acceptació dels nombres complexos, com que no succeí fins que Gauss els fonamentà amb tot el rigor matemàtic que calia. És el que veurem el l'apartat següent.

3.7. Gauss: majoria d'edat dels nombres complexos

Carl Friedrich Gauss, fill de pares pobres, va néixer en una cabana de Brunsvic, Alemanya, el 30 d'abril de 1777. Des de petit es va mostrar extraordinàriament dotat per a les matemàtiques. Quan tenia 10 anys, el seu mestre, home de costums rutinàries, els va manar que trobessin la suma de tots els nombres del 1 al 100. Immediatament Carl presentà el resultat, els seus companys trigaren més d'una hora i quan el mestre es posà a corregir trobà un únic resultat correcte, el de Gauss sense cap operació. Aquell noi et havia utilitzat, sense que ningú li ensenyés, la regla de les sumes de progressions aritmètiques. Gauss fou realment un nen prodigi.

Als 15 anys, Gauss començà l'ensenyament secundari gràcies a la protecció del duc de Brunsvic i el 1795 entrà a la Universitat de Göttingen. Estava indecís, no sabia si dedicar-se a les matemàtiques o a la filologia. El 30 de març de 1796 es decidí finalment per les matemàtiques, perquè aquell mateix dia havia fet un descobriment molt important. Desde feia més de 2000 anys se sabia com construir amb regla i compàs el triangle equilàter, el quadrat, el pentàgon regular i alguns altres polígons regulars amb nombre de costats múltiple de 2, 3 o 5. Aquell dia Gauss aconseguí de dibuixar el polígon regular de 17 costats i també aquell mateix dia començà a escriure el seu diari científic (*Notizen-journal*) que és un dels documents més valuosos de la història de les matemàtiques. Aquest diari no va entrar en circulació entre els científics fins al 1898, quaranta-tres anys després de la mort de Gauss, en demanar-lo la Reial Societat de Göttingen a un nét de Gauss per tal de ser estudiat.

Els anys de la Universitat de Göttingen van ser els més prolífers de la seva vida: es va lliurar al seu treball. L'any 1799 li va ser concedit el grau de doctor.

Casat dues vegades i pare de sis fills, el seu benefactor va morir l'any 1806 en tràgiques circumstàncies. Aleshores Gauss va ser nomenat director de l'Observatori de Göttingen, ciutat on va residir fins la seva mort als 78 anys d'edat.

Gauss va fer aportacions transcendents en la teoria de nombres i en l'àlgebra; se li deu la sistematització de l'ús de i , la noció de congruència i de restes quadràtiques, la demostració del teorema fonamental de l'àlgebra, la teoria dels determinants..., qüestions tractades en les *Disquisitiones Arithmeticae* (1801).

En la seva tesi doctoral dona la primera demostració del teorema fonamental de l'àlgebra i afirma sense demostració que no és possible resoldre algebraicament l'equació de cinquè grau.

Gauss es va interessar també pel càlcul de probabilitats. Va aportar novetats importantíssimes als camps de la geodèsia i de la cartografia i ideà una nova part de les matemàtiques: la Geometria Diferencial amb l'obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827). En la seva *Theoria motus corporum coelestium* (1809) va exposar un mètode per determinar òrbites planetàries a partir de poques observacions de l'astre. Amb la col·laboració del físic Wilhelm Weber va estudiar matemàticament el magnetisme terrestre i el 1834 va construir el primer telègraf.

Fou infatigable: com pot un home sol haver dut a terme un treball tan colossal? Ell mateix ens respon:

«Qualsevol que hagués reflexionat tan a fons i tan contínuament com jo ho he fet hauria arribat al mateix lloc.»

A Gauss se l'ha anomenat Príncep dels Matemàtics del segle XIX.

El 1799 Gauss dona la primera demostració del teorema fonamental de l'àlgebra, referent a l'existència i nombre de solucions d'una equació polinòmica de grau n , i com que la validesa del teorema depèn necessàriament del reconeixement dels nombres complexos, Gauss solidifica la posició d'aquests nombres definint-los com a parells ordenats de nombres reals i donant les normes per operar amb ells.

Gauss fou més efectiu que els seus predecessors en la recerca d'una acceptació dels nombres complexos. Els utilitza en moltes proves del teorema fonamental de l'àlgebra. En les tres primeres demostracions considera que hi ha una relació biunívoca entre les coordenades cartesianes del pla i els nombres complexos. En una carta a Wessel del 1811 és més explícit, diu que $a + bi$ és representat pel punt (a, b) . D'altra banda en les demostracions no utilitza teoria sobre funcions complexes ja que separa la part real i la part imaginària de les funcions que hi intervenen.

No hi ha dubte que si ens endinsem en les demostracions del teorema fonamental de l'àlgebra i altres publicacions ens adonarem que Gauss dominava plenament la teoria geomètrica dels nombres complexos, encara que a una carta el 1825 diu que «la veritat metafísica de $\sqrt{-1}$ és impalpable».

No obstant, si Gauss encara tenia alguns escrúpols al 1831 els va vèncer i publicà una descripció de la representació dels nombres complexos. En el segon comentari d'aquest article «Teoria Residuorum biquadraticorum» i en «Anzeige» Gauss és molt explícit en la representació dels nombres complexos. En un altre article no no-

més dona una representació de $a + bi$ com un punt (no com a vector, com Wessel i Argand) del pla complex sinó que també descriu la seva suma i multiplicació geomètrica.

La definició gaussiana facilita la representació gràfica dels nombres complexos com a punts del pla. En la seva interpretació geomètrica el complex $a + bi$ s'entén com una translació de a unitats en una direcció determinada i de b unitats en una direcció perpendicular a la primera.

El matemàtic i físic, l'anglès Hamilton, arribà independentment de Gauss a establir els mateixos resultats.

Gauss en la representació geomètrica dels nombres complexos troba que el significat intuïtiu està completament establert i a més no és necessari admetre aquestes quantitats en el domini de l'aritmètica. També diu que si les unitats 1, -1 , $\sqrt{-1}$ no haguessin tingut els noms d'unitats positiva, negativa i imaginària, sinó de directa, inversa i lateral, la gent no tindria la impressió de trobar-se davant un misteri tan fosc. La representació geomètrica aporta una nova claror a la veritat metafísica dels nombres imaginaris. Amb aquest motiu Gauss introdueix per primer cop el terme complex en contraposició del terme utilitzat fins aleshores imaginari i utilitza i per $\sqrt{-1}$.

Després de la sistematització dels nombres complexos feta per Gauss, els complexos envaeixen moltes de les rames de les matemàtiques i el seu desenvolupament és ja imparable. Es crea l'anàlisi complexa que estudia les funcions de variable complexa i en teoria de nombres s'estudien els quaternions (Hamilton) i altres tipus de nombres suggerits pels complexos. Així, els complexos obren una àmplia via d'investigació a la matemàtica que encara avui resta oberta.

Bibliografia

- Boyer, Carl B. *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1986.
- Rey Pastor, J., Babini, J. *Historia de la Matemática*. 2 vols. Gedisa, Barcelona, 1984.
- Kitchen, P. *The nature of mathematical Knowledge*.
- Flegg, G. *Numbers, their history and meaning*. Salisbury, 1985.
- Collette, J. P. *Historia de las matemáticas I, II*.
- Van Der Waerden, R. L. *A History of Algebra*.
- Calinger, R. *Classics of Mathematics*.
- Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*.
- Enciclopedia Espasa.
- Riera, T., Salillas, J., Sanchis, C. *Paràmetre 1*. Ed. Barcanova.
- Riera, T., Salillas, J., Sanchis, C. *Paràmetre 2*. Ed. Barcanova.
- Carbonell, Ll., Puig, G., Parellada, D., Tarragó, X. *Descobrim el nombre complex*. Ed. Claret, Barcelona, 1986.
- Malet, A., Paradís, J. *Els orígens i l'ensenyament de la matemàtica simbòlica*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 1984.