

XXV OLIMPIÁDA MATEMÁTICA

(Divendres 16 de desembre de 1988 de 4 a 8

i dissabte 17 de desembre de 1988 de 9 a 13)

1. Demostreu que, si n és enter positiu i p primer, $n^p - n$ és múltiple de p .
2. Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 segons, i el més ràpid ha de menester 10 segons menys que l'altre per a fer una volta completa.

Quin temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentit oposats?

3. Els extrems A i B d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes r i s que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre un punt M del segment tal que MA es la meitat de MB .
4. La societat "Peces de Ferro S. A." té nou accionistes, que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta.

Determineu la probabilitat (o el % de possibilitats) de què en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

5. Considerem una successió $\{x_1, \dots, x_n\}$ d'un nombre finit n de nombres estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leq n - 1.$$

6. Si α, β, γ són tres nombres complexos tals que els seus afixes determinen un triangle equilàter, demostreu que es té la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

7. (a) Demostreu, per a tot enter positiu n , les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

- (b) Si $E(x)$ representa la part sencera de x (el més gran dels nombres enters m tals que $m \leq x$), determineu el valor de

$$E\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}\right].$$

8. Descriuiu totes les successions (a_n) de nombres reals tals que $|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}$ ($\forall n, m \in \mathbb{N}$).