Signatura de les formes bilineals simètriques

Josep M. Rossell i Garriga
Pere Rubió i Díaz

1 Introducció

En moltes ocasions, se'ns presenten problemes on intervenen formes bilineals simètriques. Com a exemple, recordem la matriu hessiana a l'hora de determinar la naturalesa de punts crítics.

Sabem que, efectuant un canvi de base adient, arribem sempre a diagonalitzar una matriu d'aquest tipus, on a la diagonal només apareixin els valors $(+1)$ i/o (-1) i/o 0. Però certament, seguir cada vegada aquest procés no deixa de ser un exercici llarg i tediós.

És per això que anem a fer un estudi de manera que, utilitzant els menors principals de la matriu donada, puguem determinar-ne la signatura. Hi distingirem quatre casos:

1) *Teorema de Jacobi.* En la successió de signes dels menors principals no hi ha cap zero.

2) *Teorema de Gundenfinger.* En la successió de signes dels menors principals apareixen zeros aïllats.

3) *Teorema de Frobenius.* No hi ha més de dos zeros consecutius (tantes vegades com es vulgui) en la successió de signes dels menors principals.

4) Tres zeros consecutius no permeten determinar la signatura.

Malgrat tot, al final del tema demostrarem que, qualsevol que sigui el nombre de zeros consecutius en la successió anterior, podem trobar la signatura. Això, en principi, pot semblar contradictori utilitzant les tècniques emprades en els quatre casos assenyalats. Pel fet aquest últim procés sol ésser més laboriós i que en la pràctica solem trobar-nos en la situació *a), b)* o *c)*, els teoremes enunciats són especialment interessants.

Prèviament, donarem alguns resultats ja coneguts, però que ens serviran per a fixar la notació posterior.

2 Mètode general d'ortonormalització

Teorema 1 *Sigui $\varphi : E \times E \longrightarrow R$, una forma bilineal simètrica, on E és un espai vectorial de dimensió n. Aleshores, existeix una base en la qual $E = E' + Rad\varphi$, on E' és el suplement del $Rad\varphi$ en E. En aquesta nova base, la matriu de φ serà de la forma:*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} +1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$

Demostració. Per definició, Rad $\varphi = \{x \epsilon E \mid \varphi(x,y) = 0$, per a tot $y \epsilon E\}$, que és subespai vectorial de E. Suposem que dim(Rad $\varphi) = n - p$. Aleshores prenem $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ una base de Rad φ. Considerem $(e_1, \ldots, e_p)$ una base de E', subespai de dimensió p. Anem a veure com escollim aquests vectors de E'.

Prenguem $e_1 \epsilon E'$ tal que $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$. Això sempre serà possible, perquè en cas contrari siguin x, $y \epsilon E'$, tindrem $x - y \epsilon E'$. Llavors, $\varphi(x+y, x+y) = 0$ o, equivalentment, $\varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y) = 0$, el que ens diu que $\varphi(x,y) = 0$ per a tot x, $y \epsilon E'$. Però, en aquest cas, $\varphi_{|E'} \equiv 0$ i en conseqüencia $E' \subset$ Rad φ, en contra d'ésser E' el suplement de Rad φ en E.

Prenguem $e_2 \epsilon \{e_1\}^0 = E_1$. Tindrem que $\varphi(e_2, e_2) \neq 0$ per algun e_2, ja que pels mateixos raonaments anteriors, $\varphi_{|E_1} \equiv 0$, i $E_1 \subset$ Rad φ, en contra de la hipòtesi.

Reiterant el procés, arribem $e_p \epsilon \{e_1, \cdots, e_{p-1}\}^0$, amb la condició que $\varphi(e_p, e_p) \neq 0$.

Hem aconseguit, per construcció:

$$\begin{cases} \varphi(e_i, e_i) \neq 0 & \text{per } i = 1, \ldots, p \\ \varphi(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j, & \text{per } i, j = 1, \ldots, p \end{cases}$$

El fet que la suma de E' i Rad φ sigui directa, és evident.

Si cadascun dels vectors els fem de norma unitat, obtindrem una matriu del tipus:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} +1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right),$$

reordenant la base si cal.

Teorema 2 (Sylvester) *Sigui φ: $E \times E \longrightarrow R$, una forma bilineal simètrica, on E és un espai vectorial de dimensió n. Aleshores, el nombre de (+1), (-1) i/o 0, en la matriu diagonalitzada, és invariant per canvis de base.*

Demostració. Suposem que, mitjançant dos canvis de base diferents, hem aconseguit dues matrius diagonalitzades del tipus:

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c|c|c} +1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) & & \left(\begin{array}{c|c|c} +1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \\ p \quad q \quad r & & p' \quad p' \quad r' \end{array}$$

per a la mateixa forma bilineal simètrica. Representem per p, q i r (resp. p', q' i r') les dimensions dels subespais generats pels vectors tals que $\varphi(e_i, e_i) = 1$, pels que $\varphi(e_i, e_i) = -1$ i pels del radical, respectivament.

És clar que el radical d'una forma bilineal simètrica és únic, i per tant, $r = r'$. A més, $p + q + r = p' + q' + r' = n$. En conseqüencia, $p + q = p' + q'$.

Diguem H_p, $H_{p'}$ als subespais generats pels vectors de $(+1)$ i $H_q, H_{q'}$ als de (-1). Anem a veure prèviamente que H_p té norma ≥ 0. Sigui $x \in H_p$. Tenim: $\varphi(x, x) = \varphi(\sigma\alpha_i e_i, \sigma\alpha_i e_i) = \alpha_i^2 \geq 0$. Tanmateix, $H_{p'}$ té norma ≥ 0.

Suposem que $p < p'$. Això implica que $q < q'$.

Veiem que $H_{p'} \cap H_q = \{0\}$, ja que l'únic vector de norma positiva i negativa alhora és el vector nul. Per tant, $H_{p'} + H_q$ és directa.

Considerem $x \in (H_{p\prime} + H_q) \cap \operatorname{Rad}\varphi$. Serà: $x = x_{p'} + x_q \in \operatorname{Rad}\varphi$.

Efectuem:

$$\varphi(x, x_p) = \varphi(x_{p'}, x_p) + \varphi(x_q + x_{p'}) + \varphi(x_p, x_{p'}) = 0$$

$$\varphi(x, x_q) = \varphi(x_{p'}, x_q) + \varphi(x_q, x_q) = 0$$

De la primera equació obtenim:

$$\varphi(x_q, x_{p'}) = -\varphi(x_{p'}, x_{p'}) \leq 0$$

De la segona tindrem:

$$\varphi(x_{p'}, x_q) = -\varphi(x_q, x_q) \leq 0$$

Aquests dos resultats impliquen $\varphi(x_{p'}, x_q) = 0$.

D'aquí: $\varphi(x_{p'}, x_q) = \varphi(x_{p'}, x_{p'}) = \varphi(x_{q'}, x_{q'}) = 0$.

Però llavors: $x_{p'} = x_q = 0$.

Per tant: $x = 0 + 0 = 0 \longrightarrow (H_{p'} + Hq) \cap \operatorname{Rad}\varphi = \{0\}$.

Això ens diu que $H_{p'} \oplus \operatorname{Rad}\varphi$ és directa.

Aleshores: $n \geq \dim(H_{p'}) + \dim(H_q) + \dim(\operatorname{Rad}\varphi) = p' + q + r$.

Però: $n = p + q + r$.

Per tant: $p \geq p'$, en contradicció amb la hipòtesi.

Així doncs: $p = p'$, $q = q'$, que demostra la invariància.

Aquests dos teoremes ens donen l'existència i unicitat de la diagonalització d'una forma bilineal simètrica. Passem a demostrar seguidament, la invariànçia del signe del determinant, per canvis de base.

3 Determinaciò de la signatura

Proposició 1 *El signe del determinant d'una forma bilineal simètrica, és invariant per canvis de base.*

Demostració. Sigui B la matriu associada a una forma bilineal simètrica. Sigui M la matriu de canvi de base.

Timdrem que:

$$\overline{B} = {}^tMBM, \text{ on } \overline{B} \text{ és la matriu reduïda.}$$

Calculem els determinants:

$$|\overline{B}| = |{}^tMBM| = |{}^tM||B||M| = |B||M|^2.$$

Per tant, el signe del determinant de B i $\overline{B}$ és el mateix.

Aquest resultat ens permet, a partir del signes dels menors principals, determinar la signatura. Anem doncs a estudiar els quatre casos enunciats en la introducció. En tot el que segueix, suposarem trobat el radical, i tan sols utilitzarem els vectors d'una base suplementària.

Cas 1: *(Teorema de Jacobi).* Si tots els menors principals, H_i, són estrictamente positius o negatius, el nombre de $(+1)$ i de (-1) que s'obtindran en la matriu diagonalitzada, equival al nombre de signes $(+)$ i $(-)$, respectivament, corresponents als productes $H_i \cdot H_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Per comoditat, considerarem $H_0 = 1$.

Demostració. Considerant la successió de menors principals de la matriu B, $1 = H_0, H_1, \ldots, H_n$, és clar que efectuant els productes $H_i \cdot H_{i+1}$ en allò que fa referència al signe, però la proposició anterior, obtindrem la mateixa quantitat de $(+1)$ i de (-1) en la matriu diagonalitzada que el nombre de signes $(+)$ i (-) resultants d'aquests productes.

Cas 2: *(Teorema de Gundenfinger).* Zeros aïllats en la sucessió dels H_i permeten trobar la signatura. A més, si $H_p \neq 0$, $H_{p+1} = 0$, $H_{p+2} \neq 0$ es té que H_{p+2} i H_p són de signe contrari.

Demostració. Sigui $H_p \neq 0$, $H_{p+1} = 0$, $H_{p+2} \neq 0$.
Prenguem en H_{p+1} un vector, e_{p+1}, ortogonal a H_p.
Prenguem en H_{p+2} un vector, e_{p+2}, ortogonal a H_{p+1}.
La matriu haurà d'adoptar la forma:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & \dots & e_p & e_{p+1} & e_{p+2} & \dots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0 & 0 & \\
 & H_p & & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & 0 & \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & a & \\
0 & \dots & 0 & a & b & \\
 & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}$$

Desenvolupant per Laplace, tenim: $H_{p+2} = -a^2 H_p$.

Per tant, H_{p+2} i H_p són de signe contrari. Això ens diu que podem considerar $H_{p+1} = +$ a l'hora de fer els productes $H_i \cdot H_{i+1}$.

Cas 3: *(Teorema de Frobenius)*. Dos zeros consecutius en la successió de menors principals, H_i, permeten trobar la signatura. A més, si suposem que $H_p \neq 0$, $H_{p+1} = 0$. $H_{p+2} = 0$, $H_{p+3} \neq 0$, aleshores, si no hi ha canvi de signe entre H_p i H_{p+3}, s'obtenen dos (+1) i un (-1) en la matriu reduïda, i si hi ha canvi de signe entre H_p i H_{p+3}, obtenim dos (-1) i un (+1).

Demostració. Sigui $H_p \neq 0$, $H_{p+1} = 0$, $H_{p+3} \neq 0$.

Prenguem $e_{p+1} \epsilon \{H_p\}^0$, amb $\varphi(e_{p+1}, e_{p+1}) = 0$, ja que si $\varphi(e_{p+1}, e_{p+1}) \neq 0$ tindríem que $H_{p+1} \neq 0$, en contra de la hipòtesi.

Considerem ara en H_{p+2} l'ortogonal a H_p. Aquest subespai és de dimensió dos. Prenguem dos vectors de l'ortogonal. Un d'ells serà el mateix e_{p+1}, l'altre anomenem-lo e_{p+2}, e_{p+2}.

Neccessàriament, $\varphi(e_{p+1}, e_{p+2}) = 0$, ja que en cas contrari resultaria $H_{p+2} \neq 0$, en contra de la hipòtesi. A més $\varphi(e_{p+2}, e_{p+2}) = a \neq 0$.

Fem ara l'ortogonal en H_{p+3} a H_p. Serà un subespai de dimensió tres. Dos vectors d'aquest subespai ja els tenim, el e_{p+1} i e_{p+2}. En prenem un altre, e_{p+1}, amb $\varphi(e_{p+1}, e_{p+3}) = b \neq 0$ per tal que $H_{p+3} \neq 0$.

Vegem com serà la matriu amb aquestes condicions:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ e_{p+3} \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & \dots & e_p & e_{p+1} & e_{p+2} & e_{p+3} & \dots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & H_p & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b & \\
0 & \dots & 0 & 0 & a & c & \\
0 & \dots & 0 & b & c & d & \\
 & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}$$

Si desenvolupem per Laplace, obtenim: $H_{p+3} = -ab^2 H_p$.

Reordenant la base, aconseguim que la matriu prengui la forma:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc|cccc} e_1 & \dots & e_p & e_{p+2} & e_{p+1} & e_{p+3} & \dots \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+2} \\ e_{p+1} \\ e_{p+3} \\ \vdots \end{array} &
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & H_p & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & \dots & 0 & a & 0 & c & \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b & \\
0 & \dots & 0 & c & b & d & \\
 & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

El valor de H_{p+3} no ha variat, doncs hem intercanviat entre sí dues files i dues columnes. Podem observar que ara:

$$
\begin{aligned}
&H_p \neq 0, \text{ per hipòtesi} \\
&H_{p+1} = a\ H_p \neq 0, \text{ ja que } a \neq 0 \\
&H_{p+2} = 0 \\
&H_{p+3} = -ab^2\, H_p \neq 0, \text{ perquè } b \neq 0
\end{aligned}
$$

D'aquesta manera, s'ha reduït el problema al cas 2. Es poden donar les situacions següents:

		H_p	H_{p+1}	H_{p+2}	H_{p+3}
1)	$a > 0$ i $H_p > 0$	$+$	$+$	$+$	$-$
2)	$a > 0$ i $H_p < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
3)	$a < 0$ i $H_p > 0$	$+$	$-$	$+$	$+$
4)	$a < 0$ i $H_p < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$

En cadascun dels casos, ens donarà:

$$
1)\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}
\qquad
2)\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
3)\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\qquad
4)\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}
$$

Resumint, s'obté:

1) i 2) Si $a > 0$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

3) i 4) Si $a < 0$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

O bé dit de forma pràctica:

- Si no hi ha canvi de signe entre H_p i H_{p+3} s'obtenen dos (+1), un (-1) .
- Si hi ha canvi de signe entre H_p i H_{p+3} obtenim dos (-1), un (+1).

Cas 4: Tres zeros consecutius en la successió dels menors principals, no permeten determinar la signatura.

Demostració. Considerem la successió $H_0, H_1, \cdots, H_p, H_{p+1}, H_{p+2}, H_{p+3}, H_{p+4}$ amb $H_p \neq 0$, $H_{p+1} = H_{p+2} = H_{p+3} = 0$ $H_{p+4} \neq 0$.

Seguint un procés similar al cas anterior, farem:

Ortogonal en H_{p+1} a H_p, de dimensió 1. Prenem: e_{p+1}

Ortogonal en H_{p+2} a H_p, de dimensió 2. Prenem: e_{p+1}, e_{p+2}

Ortogonal en H_{p+3} a H_p, de dimensió 3. Prenem: $e_{p+1}, e_{p+2}, e_{p+3}$

Ortogonal en H_{p+4} a H_p, de dimensió 4. Prenem: $e_{p+1}, e_{p+2}, e_{p+3}, e_{p+4}$

Vegem com ha d'ésser la matriu amb aquesta construcció:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ e_{p+3} \\ e_{p+4} \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccccc} e_1 & \cdots & e_p & e_{p+1} & e_{p+2} & e_{p+3} & e_{p+4} & \cdots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & H_p & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a & b & e & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & b & c & f & \\
0 & \cdots & 0 & d & e & f & g & \\
 & & & & & & &
\end{array}\right) \end{array}$$

Estem suposant que $(ac - b^2) \neq 0$, $d \neq 0$, ja que en cas contrari $H_{p+4} = 0$, en contra de la hipòtesi.

Si reordenem la base, arribarem a:

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+2} \\ e_{p+3} \\ e_{p+1} \\ e_{p+4} \\ \vdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} e_1 & \dots & e_p & e_{p+2} & e_{p+3} & e_{p+1} & e_{p+4} & \dots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & H_p & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & \dots & 0 & a & b & 0 & e & \\
0 & \dots & 0 & b & c & 0 & f & \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \\
0 & \dots & 0 & e & f & d & g & \\
 & & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

La successió de menors principals serà ara:

H_p, aH_p, $(ac - b^2)H_p$, 0, $d^2(b^2 - ac)H_p$ on "a" pot valer zero.

Anem a veure el nombre de (+1) i (-1) corresponents als subespais H_{p+1}, H_{p+2}, H_{p+3}, H_{p+4}, aplicant els resultats obtinguts en el cas 1, que és el que en aquest moment ens ocupa, ja que tan sols hi ha zeros aïllats. Suposem $H_p > 0$, sense que això sigui restrictiu.

Les situacions que se'ns presenten són:

				H_{p+1}	H_{p+2}	H_{p+3}	H_{p+4}
1)	$a > 0$	$c > 0$		$-$	$+$	$-$	$+$
2)	$a < 0$	$c < 0$	$b^2 > ac$	$-$	$+$	$-$	$+$
			$b^2 < ac$	$-$	$-$	$+$	$-$
3)	$a > 0$	$c > 0$	$b^2 > ac$	$+$	$-$	$-$	$+$
			$b^2 < ac$	$+$	$+$	$+$	$-$
4)	$a > 0$	$c > 0$		$+$	$-$	$-$	$+$
5)	$a = 0$	$\forall c$		$+$	$-$	$-$	$+$

Podem resumir-les en:

i)	$ac > 0$,	$\forall b$	$+$	$+$	$-$	$-$		
ii)	$ac > 0$,	$b^2 > ac$	$+$	$+$	$-$	$-$		
iii)	$ac > 0$,	$b^2 < ac$	$+$	$+$	$+$	$-$	ó bé:	$+$ $-$ $-$ $-$
iv)	$a = b$,	$\forall c$	$+$	$-$	$-$	$+$		

La matriu reduïda en cada situació serà:

i), ii) i iv)

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

iii)

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Com podem observar, en el cas iii), no és possible decidir. A més, en els casos que se'ns presenten, els valor de "a", "b" i "c" no corresponen a cap determinant conegut, per tant són inútils en la pràctica.

Proposició 2 *Donada una forma bilineal simètrica de rang $(p+1)$, sempre que $H_{p+1} \neq 0$, podem aconseguir zeros aïllats en la successió de menors principals, mitjançant una reordenació dels vectors de la base.*

Demostració. Sigui $H_{p+1} \neq 0$. L'ortogonal a H_p en H_{p+1} té dimensió 1.

Prenem un vector $\bar{e_p}$ d'aquest ortogonal, que a més pertany a H_p, ja que en cas contrari $H_{p+1} = 0$, en contra de la hipòtesi. És a dir, $\bar{e}_p$ és del radical de H_p.

Diguem D_{p-1} un suplement de $\bar{e}_p$ en H_p. Si fem l'ortogonal a D_{p-1} en H_{p+1} s'obté un subespai de dimensió 2. Un vector d'aquest subespai serà el propi $\bar{e}_p$ i l'altre romandrà fora de H_p, per tant prendrem el e_{p+1}.

Vegem quina és la situació a què hem arribat:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_p \\ \vdots \\ e_{p+1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & \dots & \bar{e}_p & \dots & e_{p+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b & \dots & 0 & \dots & 0 \\ b & c & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d & \dots & e \end{pmatrix} \end{array}$$

Desenvolupant per Laplace, obtenim: $H_{p+1} = \pm\, d^2\, D_{p-1}$, on D_{p-1} és el determinant format pels productes escalars dels vectors del subespai suplementari de $\bar{e}_p$. Per tant, $D_{p-1} \neq 0$ si tal i com hem suposat $H_{p+1} \neq 0$. Això ens diu que, efectuant una reordenació de la base, aconseguirem obtenir zeros aïllats en la successió dels menors principals. Aleshores, aplicant el teorema de Gundenfinger, determinarem fàcilment la signatura.

Observació. Tal i com fèiem notar anteriorment, aquesta proposició soluciona qualsevol forma bilineal que se'ns presenti, però té l'inconvenient de no poder utilitzar directament els menors principals, ja que prèviament i per simple inspecció, haurem de reorganitzar la matriu. En donem un exemple per veure de forma pràctica com ho resoldríem.

Exemple. Determinar la signatura de la forma bilineal simètrica de matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Fàcilment podem comprovar que els valors dels menors principals són:

$$H_1 = 0 \qquad H_2 = 9 \qquad H_3 = 0 \qquad H_4 = 0 \qquad H_5 = -1 \qquad H_6 = 0$$

El rang de la matriu val 5, i per tant el radical és de dimensió 1. Com que en aquest cas $H_5 \neq 0$, estem en condicions d'aplicar la proposició anterior, ja que cap dels teoremes vistos al principi del tema s'ajusten a la situació present.

Fem una reordenació de la base. Per exemple, si intercanviem els vectors e_1 per e_4, el que en realitat efectuem és el canvi de base següent:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_4 \\ \bar{e}_2 &= e_2 \\ \bar{e}_3 &= e_3 \\ \bar{e}_4 &= e_1 \end{aligned}$$

Prescindint ja del H_5, en aquesta nova base la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Els menors principals valen:

$$H_1 = -1 \qquad H_2 = 0 \qquad H_3 = 4 \qquad H_4 = 0 \qquad H_5 = -1$$

Aplicant ara el teorema de Gundenfinger, obtenim:

$$1 \qquad - \qquad + \qquad + \qquad + \qquad -$$

Que equival a dir que en la matriu diagonalitzada apareixeran dos (+1) i tres (-1), així com un (0) corresponent al radical.

Resumint, la matriu quedarà de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Referències

[1] F. R. Gantmacher. *1966, Théorie des matrices*. Ed. Dunod. París.

E.U.P. de Manresa.