Rafael de Subirà i de Còdol i la «Memoria sobre el problema algebraico» (1808)

Carles Ignasi Gómez Ruiz, Antoni Llagostera Fernández i Joan Portell i Jubés

Resum

Rafael de Subirà i de Còdol, monjo del monestir de Santa Maria de Ripoll a les darreries del segle xviii i fins a la dissolució de la comunitat benedictina d'aquest monestir l'any 1835, fou membre de la Reial Acadèmia de Ciències Naturals i Arts de Barcelona, on va presentar el gener de 1808 un treball titulat «Memoria sobre el problema algebraico» que resol alguns aspectes d'un dels plantejaments fets en les addicions de Lagrange als *Elements d'Àlgebra* d'Euler. Més concretament, es tracta de trobar nombres enters que verifiquen una relació donada amb altres enters. El seu mètode es basa en la construcció d'una taula numèrica que permet trobar sense dificultat solucions particulars del problema. També proposa procediments per simplificar el càlcul dels elements que formen part d'aquesta taula, basats en les regularitats matemàtiques que hi troba. Subirà, que havia estat un dels monjos que va acollir a Jaime Villanueva, l'autor de *Viaje literario a las iglesias de España*, durant les seves visites a Ripoll de 1806 i 1807, és junt amb Roc d'Olzinelles, una de les grans figures de la darrera comunitat monàstica ripollesa i un símbol del seu renovat paper intel·lectual.

Paraules clau: Àlgebra, Ripoll, Euler, Lagrange, Olzinelles, Villanueva.

Abstract

Rafael de Subirà i de Còdol, who was a monk of the monastery of Santa Maria de Ripoll from the end of the xviii century until the dissolution of the Benedictine community of this monastery in 1835, was a member of the Royal Academy of Natural Sciences and Art of Barcelona, where he presented, in January 1808, a project entitled «Memoria sobre el problema algebraico» which solves some aspects of one of the approaches made in the additions of Lagrange in

Algebra Elements by Euler. More specifically, it is about finding whole numbers which verify a given relation with other intengers. His method is based in the construction of a numerical table which makes it easy to find particular solutions to the problem. He also proposes procedures to simplify the calculation of the elements that belong to this table, based on mathematical regularities which he finds. Subirà, who had been one of the monks who took Jaime Villanueva in, author of *Viaje literario a las iglesias de España*, during his visits to Ripoll in 1806 and 1807, is, together with Roc d'Olzinelles, one of the greatest figures of the last monastic community of Ripoll and a symbol of his renewed intellectual role.

Keywords: Algebra, Ripoll, Euler, Lagrange, Olzinelles, Villanueva.

L'obra que avui publiquem, «Memoria sobre el problema algebraico», és un treball d'un dels monjos que formaren part de la darrera comunitat benedictina de Ripoll. Junt amb Roc d'Olzinelles podríem dir que estem davant de les dues grans personalitats de la darrera etapa de vida monàstica ripollesa.

Contra certes visions molt negatives sobre l'estat espiritual i cultural del monestir ripollès, que alguns de manera exagerada fan remuntar fins a la mort de l'abat Oliba, les figures de Roc d'Olzinelles i Rafael de Subirà, entre altres, suposen un contrapunt aclaridor i permeten calibrar amb més finor el nivell monàstic ripollès, almenys en els darrers anys del segle XVIII i començaments del segle XIX.

No sabem on va néixer Rafael de Subirà i de Còdol, i tampoc no ens apareix en els llistats de professions monàstiques de la Congregació Claustral Tarraconense.[1]

El que sí podem indicar és que el segon cognom, Còdol, no és estrany en la tradició benedictina. Entre 1796 i 1802 fou abat del monestir de Ripoll Francesc de Còdol i de Minguella.[2]

Sabem que era monjo del monestir de Santa Maria de Ripoll per diferents fonts.[3] Ocupà (almenys des de 1802) el càrrec de sagristà major, amb casa pròpia dins del monestir.

Tenim notícies d'aquesta casa perquè en la visita dels dies 21 i 23 de juliol de 1802 dels visitadors de la Congregació Claustral s'esmenta que «[...] vimos con particular contento nuestro que se esmeran con singular cuidado el prelado y sus súbditos al mayor aseo y limpieza de la iglesia, y a la restauración de la fábrica material, acabándose de concluir dos bellas y cómodas casas, que con cuantiosas sumas han costeado Dr. Fr. Magín de Moxó i Dn. Fr. Rafael de Subirà».[4]

Subirà fou un dels monjos que va atendre a Jaime Villanueva, l'autor de *Viaje literario a las iglesias de España* durant la seva estada al monestir de Ripoll, on diu haver revisat el material de la biblioteca i arxiu de Ripoll «a mi satisfacción» i que «en esto he debido gran franqueza a D. Rafael Subirá, bibliotecario y sacristán de la casa».[5]

Més enllà d'aquesta elogiosa menció del polígraf valencià, sabem que Rafael de Subirà i de Còdol fou membre de la Reial Acadèmia de Ciències Naturals i Arts de Barcelona,[6] on va ser admès com a acadèmic corresponent el 16 de març de 1808 destinat a la Direcció d'Àlgebra i Geometria.

En aquesta institució, per a la seva admissió, va presentar l'any 1808 un treball que fins ara, segons deia Molins, era titulat «Disertación sobre matemáticas».[7] Una consulta a l'arxiu històric de l'acadèmia ens confirma, però, que el treball és titulat «Memoria sobre el problema algebraico» y que és datat el 21 de gener de 1808.

Elias de Molins menciona també un Rafael Subirà i de Codol que va publicar, en plena guerra del Francès, a Berga, l'any 1813, un treball titulat «Tentativas sobre varios famosos problemas geométricos y aritméticos».[8] Resulta curiós constatar la dedicació i publicació d'un treball científic com aquest a Berga, a la «Imprenta de la Gaceta» i en plena guerra del Francès.

Però de Rafael de Subirà i de Còdol tenim també una narració dels darrers atzarosos dies que va passar al monestir de Ripoll l'agost de 1835, durant l'amotinament dels miquelets liberals que va suposar la fi de la vida monàstica a Ripoll.

El relat, que podem trobar en els llibres de Gaietà Barraquer, comença la tarda del diumenge 9 d'agost de 1835, quan els miquelets liberals insubordinats assalten el monestir i maten dos monjos i incendien algunes dependències:

> «El anciano sacristán mayor Don Rafael Subirá escondiéndose entre las elevadas matas de judías de la huerta llamada *huertos comunes:*[9] más algunos lo hallaron, a los que en precio de su salvación ofreció y dió oro, y aquellos le salvaron. Esta es la tradición de los ancianos, que creo verídica; pero de ella deduzco que los que encontraron y salvaron a dicho monje no serían enemigos migueletes, sino nacionales, pues es máxima de todo hombre de guerra experimentado, que el prisionero que ofrece dinero al aprensor muere irremisiblemente, porque éste quiere a toda costa cerrar la boca del expoliado, objeto que logra por completo y a malsalva. Uno de los ancianos hasta fija la cantidad entregada poniéndola en 13 onzas.
>
> Confirma mi indicada creencia de que el salvador o salvadores de Subirá fueron nacionales ripolleses el dicho de otro de los ancianos interrogados, el cual omitiendo el escondimiento entre las judías, decía que se salvó entrándose en el cuerpo de guardia que los nacionales tenían al pie de los huertos comunes, cuerpo de guardia en donde estaban precisamente los más exaltados. El que recibió las 13 onzas «le guió por el molino de Retó[10] disfrazado con pantalones y gorra

encarnada echada para adelante para que tapase la vista del monje, quien siempre había usado anteojos. Al fin asociarse con Don Roque y Don Pedro Mártir Olzinellas que estaban disfrazados con capote y sombrero de copa; y los tres son acompañados por Anton Raguer a casa Duran (Don Manuel) vulgó Bandó. Enseguida por la puerta trasera pasan a casa D. Mariano Pascual (eclesiástico), pero mientras suben la escalera entran por la otra puerta los amotinados: empero pueden hurtarse a la vista de estos, y asegurarse en un aposento de arriba. En su retiro D. Roque se ocupaba en enseñar a andar con soltura a D. Rafael, quien quitados los anteojos perdía el tino, y además los tres se encomendaban a Dios con fervor. Tres días después salían de Ripoll acompañados de Anton Brusi, alias Gironí, hasta la puerta de la villa. Aquí la marcha embarazada de D. Rafael ocasionó que fuesen descubiertos; pero como el guía era miliciano, pudo detener el furor, y prosiguiendo su viaje acompañados de José Barrató y Barrabam hasta la raya de Francia en Oseja, donde tiempo después murió el sabio D. Roque, asistido de su amigo José Vives", en 13 de octubre de 1835».[11]

Aquesta és la darrera informació que tenim del monjo Rafael de Subirà i de Còdol.

La figura de Rafael de Subirà, tant per la seva llarga estada a Ripoll, per la seva edat (ja que devia ser bastant gran), pel seu càrrec dins del monestir, com per la seva fesomia («siempre había usado anteojos»), era sens cap dubte una personalitat entranyable per als ripollesos.

Una mostra d'aquesta popularitat de Rafael de Subirà a Ripoll n'és que bastants anys després, el juny de 1863, quan el propietari Francesc Vives insta la demolició d'un edifici conegut com casa de Don Rafael, Eudald Raguer en un informe explica que es tracta de la «Sacristía mayor, edificio moderno y completamente común, nada artístico ni monumental, llamado por algunos casa de D. Rafael Subirá, por ser este el nombre del último monge sacristán mayor que lo ocupaba».[12]

La tradició científica al monestir de Ripoll

El monestir de Santa Maria de Ripoll té una llarga tradició científica, ben coneguda. Els manuscrits procedents del seu antic scriptorium (Beer, 1909) compten amb exemplars dedicats a les anomenades arts liberals, i en particular a les matemàtiques, encara que aquest material s'acumula a l'època dels primers abats, especialment entre Arnulf (948-970) i Oliba (1008-1046). Aquests manuscrits han estat estudiats abastament i tenen un lloc preferent en la història de la ciència (Vernet, 2004).

Els monjos ripollesos no han pogut prescindir en cap moment de l'estudi de les matemàtiques en una comunitat constructora d'edificis i ponts, i que havia de resoldre contínuament problemes de càlculs econòmics o geomètrics.

A l'inici del segle xix Ripoll vivia una època de prosperitat sota l'ègida del monestir i els seus monjos benedictins. Com diu Josep Maria Pellicer i Pagès (Pellicer, 1888) citant el notari Eudald Mirapeix:[13] «A principios de este siglo continuaba la villa en el estado más feliz, prosperaba la agricultura, más de 30 fábricas de tejidos é hilados contaba aquella en su recinto...»[14]

I segons el mateix Pellicer: «La ciencia estaba bien representada en la casa del Archivo [...], en la Biblioteca del palacio abacial y en la Real Escuela, que tanto acreditaron insignes catedráticos y sabios escritores. El arte, en sus múltiples manifestaciones, fué siempre fomentado por los solícitos prelados [...]. La contemplación de estas obras maestras del arte, el cultivo de las ciencias, la conversación y trato frecuente con los monjes que á su carácter religioso unían una educación esmerada, propia de las nobles familias de donde procedían, contribuyeron á la especial cultura de los habitantes de los valles del Ter y del Freser.»[15]

En aquest sentit, Rafael de Subirà, un destacat membre de la comunitat, en ésser admès com a membre de la Reial Acadèmia de Ciències Naturals i Arts de Barcelona el dia 16 de març de 1808, després de ser aprovada la «Memoria» que transcrivim, no feia més que seguir una tradició històrica.

Hi veiem un monjo il·lustrat que conrea les Matemàtiques més enllà de la seva utilitat immediata, amb curiositat intel·lectual. Que aborda amb cert èxit el repte de resoldre un problema d'àlgebra senzill en el plantejament, però complex en la resolució. I que està en contacte amb la cultura europea, com sempre ho havia estat el monestir de Ripoll. En particular, coneix l'obra d'Euler i Lagrange, de la qual extreu el plantejament del problema.

L'àlgebra i algunes notes biogràfiques d'Euler i Lagrange

L'àlgebra és la branca de les matemàtiques que, en la seva part clàssica, es consagra a la resolució de les equacions algèbriques mitjançant fórmules explícites i, en la seva part moderna, estudia les estructures (grups, anells, cossos, ideals) i es prolonga en l'àlgebra lineal, l'àlgebra topològica...

A la primavera d'aquest mateix any 2007 hem commemorat el 300 aniversari de Leonard Euler (Basilea, 1707-Sant Petersburg, 1783), a qui els matemàtics devem tant. El seu talent natural per les ciències exactes es va evidenciar molt aviat. Es pot considerar com un dels matemàtics més grans de la història, comparable amb Euclides, Arquimedes, Newton o Gauss. Graduat de manera brillant a Basilea, va viure gran part de la resta de la seva vida a Sant Petersburg, excepte un període en què es va incorporar a l'acadèmia de Berlín, invitat per Frederic el Gran de Prússia. Les seves obres completes (*Opera Omnia*) estan formades per 87 volums amb prop de 900 treballs. Sense comptar altres escrits seus, resulta una mitjana d'unes 800 pàgines a l'any, gran part d'elles originals. Segurament és l'obra més prolífica d'un únic autor de matemàtiques. L'àlgebra només hi ocupa un 7% del total. Encara és una àlgebra clàssica, però conté la resolució de molts tipus d'equacions. Gran part de la seva obra està dedicada al nou càlcul diferencial i integral, però també hi són la geometria, la teoria de nombres, el càlcul de probabilitats... Moltes vegades, quan obrim un llibre de matemàtiques no sabem que el que estudiem va ser descobert per Euler. Una de les seves fórmules més famoses, prodigi de simplicitat i síntesi és: $e^{i\pi}+1=0$, que relaciona els nombres més importants: π, i, e, 1 i 0. El número e s'anomena així en el seu honor, coincidint amb la inicial del seu primer cognom. Existeixen moltes biografies d'Euler. Nosaltres recomanem la que figura a la bibliografia (Dunham, 2000).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) va néixer a Torí en el si d'una família d'ascendència gal·la. Es va graduar a la seva ciutat natal, on va ser professor de l'Escola d'Artilleria fins que va ocupar la plaça que va quedar vacant a Berlín quan el seu predecessor, Euler, va tornar a Rússia. A la mort de Frederic el Gran, va ser invitat a París per Lluís XVI de França, on va quedar-se fins a la seva mort. Va ser professor de l'École Normale i de l'École Polytechnique. Va desenvolupar un paper molt important en el perfeccionament de l'educació durant el període revolucionari,[16] sobretot durant el mandat de Napoleó, que el va premiar per la seva important feina científica.

Tenia una gran cultura matemàtica, i les seves obres tracten temes molt dispars, com la mecànica, la geometria, la teoria de les equacions diferencials, l'astronomia, les funcions analítiques, la teoria dels nombres, i evidentment l'àlgebra, com podrem comprovar a continuació. Per a més dades sobre la seva biografia recomanem el llibre que figura a la bibliografia (Pardo Rego, 2003).

Euler i Lagrange són importants pilars de la gran revolució científica i matemàtica que es pot considerar iniciada al segle XVII per Newton com a principal protagonista, i que no ha deixat d'evolucionar recolzada damunt l'esquena d'aquests gegants.

Les fonts del problema algebraic

El plantejament del problema que fa el monjo ripollès Rafael de Subirà en aquesta «Memoria del problema algebraico» és bastant senzill d'entendre: Donats R i D, nombres enters, cal trobar N també enter, de manera que la divisió de $N^2 - R$ entre D sigui exacta, és a dir, tingui un quocient C enter, tal com indica la fórmula:

$$\frac{N^2 - R}{D} = C$$

Subirà ens comunica que ha trobat aquesta qüestió plantejada en «las adiciones de M. Lagrange a la análisis indeterminada de M. Euler».

L'any 1770, l'Acadèmia Imperial de les Ciències de Sant Petersburg havia publicat en alemany els *Elements d'Àlgebra* de Leonard Euler. Quatre anys més tard (1774) es publica a Lió la mateixa obra traduïda al francès amb unes addicions de Joseph Louis Lagrange. Molt segurament aquesta és l'edició que va arribar a les mans de Subirà, o una altra posterior,[17] un detall que ens demostra el seu coneixement de les novetats matemàtiques.

Subirà ens comunica la font del problema a l'inici de la seva memòria: «hallé indicada en las adiciones de M. Lagrange a la análisis indeterminada de M. Euler.» Efectivament, en el punt 64, dins de l'apartat VII de les seves Addicions (Lagrange, 1877, tom 7) proposa un mètode per resoldre equacions de la forma $Ry^2 + D = x^2$ en la qual R, D, y són enters, i per tant també x ha de ser enter. Aquesta equació és equivalent a $x^2 - Ry^2 = D$. Després de demostrar que y i D han de ser primers entre ells, i de fer la transformació $x = Ny - Dz$, amb N i z enters, obté l'equació $(N^2 - R)y^2 - 2NDyz + D^2z^2 = D$ en la qual el terme $(N^2 - R)y^2$ ha de ser divisible per D, ja que els altres termes ja ho són. I com que y i D són primers entre ells, necessàriament, si l'equació té alguna solució entera, $N^2 - R$ ha de ser divisible per D. Com que R i D són valors donats, es tracta de trobar possibles valors de N que facin exacta la divisió $\frac{N^2 - R}{D}$ obtenint un quocient enter C. Clarament, aquest és el mateix problema algebraic que planteja Subirà.

Si fem la transformació $\frac{N^2 - R}{D} = C$ l'equació queda de la forma

$Cy^2 - 2Nyz + Dz^2 = 1$. Segons Lagrange, aquesta equació és molt més senzilla que la proposada, i a continuació n'explica dos mètodes de resolució.

Subirà diu que «el problema es indispensable para la resolución de algunas cuestiones las más difíciles, e intrincadas». A la pàgina 12 és més precís. Indica «las cuestiones más difíciles, que necesitan de él para su resolución». D'entre les quatre que esmenta, la primera és trivial. La segona i tercera confirmen el seu coneixement del llibre de Lagrange. La coincidència és aclaparadora. Afirma que ens permet resoldre equacions de la forma $cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$.

Aquesta no és més que l'equació anterior amb un canvi de nomenclatura, i és com apareix en l'obra de Lagrange. Sabem que la notació en àlgebra és arbitrària, sempre que respecti certes normes. Però dintre d'un text no és convenient canviar-la sense previ avís. La nomenclatura inicial adoptada per Subirà ens ha condicionat. I així hem fet els canvis $c \rightarrow C$, $n \rightarrow N$, $A \rightarrow R$, $B \rightarrow D$ per adequar la nomenclatura de Lagrange amb la utilitzada en la «Memoria». Cosa que no fa el propi Subirà, el qual es limita a copiar, suposem, l'expressió tal com apareix en el llibre de Lagrange. El mateix succeeix amb la tercera qüestió que esmenta a la mateixa pàgina 12:

«Para poder cuadrar esta: $V(Ay^2+B)$.» No oblidem que l'equació de sortida és de la forma $Ry^2+D=x^2$ ($Ay^2+B=x^2$ en el text de Langrage). Amb l'expressió «cuadrar» podem entendre que es tracta de trobar un quadrat, és a dir, x^2.

Subirà ens diu a la pàgina 1 de la seva «Memoria» que Lagrange «no manifiesta allí como se encuentra». Es refereix, és clar, a la manera de trobar N.

Però Lagrange hi deixa alguna pista. Diu textualment: «Nous avons donné ailleurs des règles pour faciliter la recherche des valeurs de N [n en el text] qui peuvent avoir la propriété requise, et même pour trouver ces valeurs a *priori* dans un gran nombre de cas.» En l'edició que hem fet servir, una nota ens informa que tot això es troba a les *Memòries de Berlín* de l'any 1767, incloses en el tom 2 de les seves obres.

Efectivament, Lagrange hi resol amb la seva elegància habitual el problema algebraic. No es limita a trobar algunes solucions particulars. Dóna, mitjançant un teorema, una condició necessària i suficient per a l'existència de solucions. Passar de casos particulars a teoremes generals és el gran repte de les Matemàtiques des del seu naixement. Des de Pitàgores a la tan anhelada durant segles i finalment aconseguida demostració del teorema de Fermat. I els reptes no s'han acabat...

Exposem aquí un esbós del seu mètode:

Considerem $\dfrac{N^2-R}{D}$

Si D no és un número primer el descomponem en el seus factors primers

$D=a*b*c...$

Per tal que la divisió sigui possible és necessari que ho sigui per a cadascun dels factors.

Suposem que a és un d'aquests factors primers, examinem el quocient $\dfrac{N^2-R}{a}$ en els diferents casos possibles:

1) Si a és divisor de R:

aleshores només cal fer $N=ka$ (k qualsevol enter).

2) Si $a=2$ i R parell:

evidentment qualsevol N parell és solució.

3) Si $a=2$ i R senar:

o sigui $R=2n+1$ (amb n enter)

triem N senar, o sigui $N=2k+1$ (k enter) aleshores:

$N^2 - R = (2k+1)^2 - 2n - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 2n - 1 = 4k^2 + 4k - 2n$

és divisible per 2, que és el valor de *a*.

4) $a \neq 2$ i no és divisor de *R*:

Aquest cas és més complex. Per resoldre'l, Lagrange enuncia i demostra aquests dos teoremes:

a) No és possible quan $N^2 - R$ sigui divisible per *a* i que $R^{\frac{a-1}{2}} - 1$ no sigui divisible per a. És a dir, de la divisibilitat per *a* de $N^2 - R$ es dedueix la de $R^{\frac{a-1}{2}} - 1$

b) Si a és divisor $R^{\frac{a-1}{2}} - 1$, aleshores existeix *N* tal que *a* és divisor de $N^2 - R$.

Per tant, tenim una condició necessària i suficient per a l'existència d'almenys un valor de *N*. Lagrange ens diu que l'autor de les dues demostracions és Euler, si bé manifesta que el seu precursor no va trobar la utilitat que té aquesta propietat per a la resolució de les equacions esmentades.

A continuació desenvolupa procediments per poder trobar les solucions, que el lector interessat pot consultar, però amb això ja ens fem una idea dels procediments matemàtics utilitzats.

La taula adjunta. Explicació del procediment amb aportacions pròpies.

L'Arxiu de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, on hi ha aquesta «Memoria», ens ha proporcionat la còpia que transcrivim per poder procedir al seu estudi. Però no ha estat possible trobar una part complementària que amb tota seguretat acompanyava aquest escrit. Es tracta d'una taula adjunta i algunes anotacions anomenades NII, NIII...

La taula és fonamental per entendre el mètode de Subirà. N'hem elaborat una rèplica que considerem que ha de ser pràcticament coincident amb l'original, basada en les explicacions del text.

La principal diferència és que nosaltres l'hem generat automàticament amb un full de càlcul, mentre que Subirà segurament va fer d'un en un els càlculs de les caselles.

De fet, l'evolució dels procediments de càlcul ens permet avui generar un programa d'ordinador que vagi més enllà: Només cal donar *R* i *D* i la màquina ens proporcionarà en menys d'un segon la solució *N* en cas d'existir. Si no existeix solució per a aquests valors donats, també ens n'informarà. I anant més enllà, podem afinar el programa per aconseguir un llistat tan llarg com es vulgui, *ad infinitum*. Això sí, si volem esperar tots els resultats possibles, necessitarem un temps infinit, per molt ràpidament que calculi la màquina. Excepte que es demostri que a partir d'un cert lloc en endavant (és a dir, per a valors de R i D molt grans) no existeixen solucions.

A l'inici del segle xix, Subirà ja va tenir prou feina per elaborar una taula de 50 files i 50 columnes i després trobar-hi possibles patrons que es poguessin repetir de manera regular per aconseguir simplificar els càlculs.

A la vista de la taula, és fàcil trobar les possibles solucions al problema plantejat. Cal observar la llei de formació: el número que apareix en cada casella representa el residu (R) que s'obté quan dividim el quadrat de N (situat a la primera fila) per un número D donat (situat a la primera columna).

Fem algun exemple: suposem que $R = 22$ i $D = 33$. Mirant els nombres de la taula, veiem que aquesta parella correspon al valor $N = 11$, que és solució del problema. Efectivament: $N^2 = 121$, que dividit per 33 dóna 22 de residu (i 3 de quocient). Si mirem més valors cap a la dreta, veiem que $N = 22$ i $N = 44$ també són solucions. Per altra banda, si donem $R = 10$ i $D = 33$ no trobem cap solució si considerem els valors que tenim a la taula.

Un dels objectius de les Matemàtiques és el reconeixement de les possibles regularitats, repeticions, coincidències, patrons... que es puguin donar en una situació determinada. Això permet no només la classificació simplificadora. Ens porta a la generalització i l'obtenció de lleis universals, expressades molt sovint mitjançant fórmules i teoremes.

És clar que no podem dir que Subirà hagi assolit el nivell dels grans matemàtics Euler i Lagrange, que aconsegueixen donar teoremes generals. Però sí troba certes regularitats que ara explicarem.

Queda clar que si poguéssim disposar d'una taula més gran, es podria resoldre el problema per a més valors. Però en un moment en què el càlcul té fortes limitacions, l'esforç de Subirà va adreçat a trobar regularitats que ens permetin simplificar les operacions. El seu llenguatge decimonònic, bastant retòric, cargolat i de vegades confús no ens ha facilitat la tasca. A continuació intentem aclarir moltes de les seves observacions. De totes maneres, el lector curiós pot seguir investigant ja que segons Subirà «las maravillosas propiedades de la tabla son tales que no puedo a la verdad recelar, que no se encontrará otra cualquiera tabla, sea la que fuere, que tenga tantas, y tan preciosas» (p. 32). Si bé recomana per facilitar molts càlculs la consulta de «las tablas de cuentas hechas de Barremé[18] en Francés».

La primera regularitat que salta a la vista observant la taula és la següent: la diagonal principal està formada per zeros. Si observem els nombres d'una fila (línia horitzontal) qualsevol, veurem que a partir d'aquest zero es tornen a repetir tots en el mateix ordre, i quan s'acaba la sèrie i apareix el zero, torna a repetir-se... Per exemple, a la fila de l'11, trobem: 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1, 0; 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1, 0; 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1, 0... Per tant, si coneixem només la primera sèrie podem conèixer totes les altres, per simple translació. Donat un valor, si avancem 11 cap a la dreta, tornem a trobar el mateix valor.

Per això, la taula de Subirà, tal com ens explica, devia tenir la meitat de valors dels que té la que nosaltres adjuntem. Segurament havia observat aquesta regularitat, i per estalviar-se molts càlculs s'atura quan arriba a la diagonal principal. Nosaltres hem preferit donar la taula amb totes les files (línies horitzontals) i columnes (línies verticals) plenes, ja que el càlcul automàtic ens ho permet, i d'aquesta manera queden més paleses aquestes i altres relacions.

La recerca de regularitats no s'atura aquí. En cada sèrie horitzontal, abans d'arribar a la diagonal, (de la forma que hem considerat més amunt) troba una altra llei de formació. Si observem la mateixa fila, corresponent al número 11, ens adonem que els nombres es van repetint, a partir de la meitat, en sentit invers: 1, 4, 9, 5, 3; 3, 5, 9, 4, 1. Això passa en general: per exemple, observem la fila 34, triada en el text d'en Subirà. Ens diu que la meitat del divisor és el terme últim de la transversal. Cal aclarir que anomena transversal la sèrie 1, 4, 9, 16, 25, 2, 15, 30, 13, 19, 8, 33, 26, 21, 18, 17. El 17 és l'últim terme de la transversal. A partir d'aquest valor central la sèrie es repeteix en sentit invers, i això passa en general. Al voltant d'aquests «últims termes» pivota tot el seu raonament, i per això apareixen en negreta en la nostra taula.

En la fila del 34, a partir d'aquest «últim terme» es poden trobar tots els altres sumant els senars per ordre, de la manera: 17+**1** = 18 ; 18+**3** = 21; 21+**5** = 26; 26+**7** = 33; 33+**9** = 42 aquest darrer valor passa de 34; fem 42-34 i obtenim el següent terme: 8. Sumem a 8 el següent senar: 8+**11** = 19. I així podem seguir. Més avall donarem unes fórmules que hem elaborat i que permeten fer aquest càlcul de manera general.

Adjuntem una petita demostració d'una propietat relacionada amb aquesta regularitat observada:

Propietat: És suficient buscar solucions per a $N < \frac{D}{2}$

Efectivament, si podem trobar un número enter a tal que $\frac{a^2 - R}{D}$ sigui enter fem aleshores $N = kD \pm a$ amb k enter; $\frac{N^2 - R}{D}$ *serà també enter. En efecte,* $\frac{N^2 - R}{D} =$ $\frac{(kD \pm a)^2 - R}{D} = k^2 D \pm 2ka + \frac{a^2 - R}{D}$ que és enter. Com que no hem imposat cap condició a k ni al signe de $kD \pm a$, sempre podem triar k i el signe de manera que $N < \frac{D}{2}$ tal i com dèiem.

Subirà fa referència a unes anotacions marginals agrupades en apartats anomenats NII, NIII, i que contenen certes fórmules i observacions. No disposem d'aquesta part del seu treball, que segurament va lliurar també. Podem esbrinar part del seu contingut.

El seu objectiu és trobar els termes de les sèries (transversals), els termes últims i també, si coneixem una solució N, trobar la resta de solucions d'una fila. Tot això amb el mínim de càlculs possibles.

Agrupa els possibles valors de D de 4 en 4. Per això fa la divisió per 4, i anomena q el quocient, obtenint:

$D = 4q$ o $D = 4q + 2$ (quan D és parell)

$D = 4q + 1$ o $D = 4q + 3$ (quan D és senar)

Se suposa que en les anotacions NII, NIII explica més detalls, però en el text només sabem com actua en el cas $D = 34$ i $D = 35$.

Donem a continuació les fórmules que es poden aplicar, moguts per curiositat matemàtica, intentant aclarir i ampliant els suggeriments de Subirà. Per tant, els continguts dels apartats NII, NIII... poden coincidir en part, però no són els que esmenta, que s'han perdut

NII Cas D senar :

a) Si $\boldsymbol{D = 4q+1}$

- Lloc que ocupa l'últim terme (abans repetició): $N = \frac{D-1}{2} = \boldsymbol{2q}$

- Per trobar R a partir del quocient q:

Considerem $\frac{N^2 - R}{D} = \frac{(2q)^2 - R}{4q+1}$ (1)

Es pot observar que en tots aquests casos, $\frac{N^2 - R}{D} = q - 1$. Per tant, el numerador d'aquesta fracció serà (4q+1) (q-1); si operem, $(4q+1)(q-1) = 4q^2 - (3q+1)$ (2)

comparant (1) i (2) resulta $\boldsymbol{R = 3q + 1}$

Observació: es poden comprovar aquests resultats a la taula. Exemple: D = 33. El terme últim ocupa el lloc $2q = 2.8 = 16$, i val $3q + 1 = 25$.

b) Si $\boldsymbol{D = 4q+3}$

- Lloc que ocupa l'últim terme (abans repetició) $N = \frac{D-1}{2} = \boldsymbol{2q + 1}$

- Per trobar R a partir del quocient q :

Considerem $\frac{N^2 - R}{D} = \frac{(2q+1)^2 - R}{4q+3}$ (3)

Es pot observar que en tots aquests casos, $\frac{N^2 - R}{D} = q$. Per tant, el numerador d'aquesta fracció serà $(4q + 3)$ q

Veiem que $(4q + 3)q = 4q^2 + 3q$ (4)

comparant (3) i (4), com que $(2q+1)^2 - R = 4q^2 + 4q + 1 - R$

resulta $\boldsymbol{R = q + 1}$

Observació: es poden comprovar aquests resultats a la taula. Exemple: D = 35. El terme últim ocupa el lloc $2q$ +1=2.8+1=17, i val $R = q + 1 = 9$

NIII Cas D parell:

a) Si $\boldsymbol{D = 4q}$

- Lloc que ocupa l'últim terme (abans repetició) $N = \frac{D}{2} = \boldsymbol{2q}$; evidentment $\boldsymbol{R = 0}$

Observació: es poden comprovar aquests resultats a la taula. Exemple: D = 32. El terme últim ocupa el lloc $2q$ = 2.8 = 16, i val R = 0

b) Si $\boldsymbol{D = 4q + 2}$

- Lloc que ocupa l'últim terme (abans repetició): $N = \frac{D}{2} = \boldsymbol{2q + 1}$

- Per trobar R a partir del quocient q: Considerem: $\frac{N^2 - R}{D} = \frac{(2q+1)^2 - R}{4q + 2}$ (5)

Es pot observar que en tots aquests casos, $\frac{N^2 - R}{D} = q$. Per tant, el numerador d'aquesta fracció serà $(4q + 2)\, q$

Veiem que $(4q + 2)\, q = 4q^2 + 2q$ (6)

comparant (5) i (6), com que $(2q + 1)^2 - R = 4q^2 + 4q + 1 - R$, resulta $\boldsymbol{R = 2q + 1}$

Observació: es poden comprovar aquests resultats a la taula. Exemple: D = 34. El terme últim ocupa el lloc $2q + 1$ =2.8+1=17, i val R=17

NV Sobre l'apartat NII només sabem que hi posa els nombres senars 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...

Els fa servir per obtenir de la manera que hem explicat més amunt tots els termes de la transversal. De fet, això només funciona si D és parell. En el cas en què D és senar, s'ha de fer el mateix procediment, però sumant-hi els parells. En l'exemple que explica Subirà al final de la pàgina 7 ens sembla que hi ha una errada. En el cas D = 35, per obtenir els altres residus, s'han de sumar els parells, i no el senars com hi diu. Jutgi el mateix lector. Nosaltres donem a continuació aquestes lleis de formació d'una manera més matemàtica

Obtenció del residu a partir de l'últim terme de la transversal

a) D parell $D = 4q$ o $D = 4q+2$

Si R és el residu del terme últim i d la diferència entre el número de la columna d'aquest i la buscada,

$$R_d = R + [\sum_{x=0}^{d} (2x+1)] - kD$$

on $k = (0,1,2,3,...)$ serà el mínim valor que fa $R_d < D$

b) D senar $D = 4q + 1$ o $D = 4q + 3$

Si R és el residu del terme últim i d la diferència entre el número de la columna d'aquest i la buscada,

$$R_d = R + [\sum_{x=0}^{d} 2x] - kD$$

on $k = (0,1,2,3,....)$ serà el mínim valor que fa $R_d < D$

NIV En el text de Subirà també es fa referència a aquest apartat. Tampoc no coneixem les fórmules que contenia. Però almenys entenem els problemes que intenta resoldre i més o menys algunes solucions proposades. Donem a continuació les nostres fórmules:

a) Altres valors de N amb el mateix residu:

Suposem que considerem un valor concret de N igual a n que verifica la solució. Aleshores $n \pm mD$ amb $m = (1,2,3,...)$ també és solució.

Efectivament,

Considerem $\dfrac{(n \pm mD)^2 - R}{D} = \dfrac{n^2 - R}{D} + (m^2 D \pm 2nm)$

Com que $m^2 D \pm 2nm$ és enter , si $\dfrac{n^2 - R}{D}$ és enter

$\dfrac{(n \pm mD)^2 - R}{D}$ també ho serà

b) Extrapolació al cas $\dfrac{N^2 + R}{D}$

si $\dfrac{N^2 + R}{D}$ és enter, $\dfrac{N^2 + R}{D} - 1$ també ho és,

aleshores $\dfrac{N^2 + R}{D} - 1 = \dfrac{N^2 - (D - R)}{D}$ que es redueix al cas general, considerant

$R' = D - R$

c) Cas $R > D$

Podem fer $R = R' + kD$ amb $R' < D$ i k = (0,1,2,3,...)

$\dfrac{N^2 - R}{D} = \dfrac{N^2 - R'}{D} - k$ que és el mateix cas que abans.

Comentaris sobre la segona part

Subirà dedica la segona part del seu treball a trobar regularitats en les columnes. Això li permet, entre altres coses, trobar el quocient sense fer la divisió.

Torna a considerar com a punt de sortida els termes últims de les transversals. Ara trobarà agrupaments en les columnes que hi surten i que anomenarà agregats.

Més amunt (NII i NIII) ja hem dit quin és el valor dels quocients dels termes últims sense fer les divisions. Més exactament, només hem de dividir D per 4 per obtenir el quocient de la divisió $\frac{N^2 - R}{D}$, que sempre serà q excepte en un cas, que és q-1, tal com expliquem a continuació:

Quocients últim terme

1) $D = 4q$

   $N = 2q$

   $R = 0$

el quocient és evidentment q

2) $D = 4q+1 \quad N = 2q$

   $R = 3q+1$

   $$\frac{(2q)^2 - (3q+1)}{4q+1} = \frac{(4q+1)(q-1)}{4q+1} = q - 1 \text{ que és el quocient}$$

3) $D = 4q+2 \quad N = 2q+1$

   $R = 2q+1$

   $$\frac{(2q+1)^2 - (2q+1)}{4q+2} = \frac{(4q+2)\,q}{4q+2} = q \text{ que és el quocient}$$

4) $D = 4q+3 \quad N = 2q+1$

   $R = q+1$

   $$\frac{(2q+1)^2 - (q+1)}{4q+3} = \frac{(4q+3)\,q}{4q+3} = q \text{ que és el quocient}$$

A la pàgina 16 Subirà dóna les fórmules per trobar els últims termes a partir del quocient *q*, que són les que ja hem deduït a NII i NIII. És clara la relació entre els quocients i els termes últims. Però com es pot trobar el quocient d'un altre terme qualsevol sense fer la divisió?

Subirà hi troba una manera: segueix analitzant les columnes a partir del terme últim sobre el qual tot pivota, en sentit descendent. I què comprova? Considerem un exemple, que ens ajudarà a aclarir-ho: Sigui $D = 17$, el terme últim és el 13. Escrivim la sèrie cap a baix: 13, 10, 7, 4, 1; 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0; 30, 29, 28, 27, 26,... Podem considerar-hi tres agregats: el primer són els termes d'una progressió aritmètica de diferència -3. En el següent, la diferència és -2, en el següent –1. Dons bé, aquestes diferències (considerades en valor positiu) són els quocients que s'obtenen quan dividim el quadrat de la N que es troba a dalt de la columna (en aquest cas 8) i les D corresponents: Es pot comprovar que la divisió de $N^2 = 64$ entre 17, 18, 19, 20 i 21 dóna 3 de quocient, a continuació la divisió del mateix 64 entre 22, 23, 24,...31, 32 dóna 2 de quocient. I les divisions a partir de 33 donen 1 de quocient. Tal com diu Subirà, «todo esto es general, y cierto para todas las columnas, y sus agregados de la tabla». Afegeix una mica més endavant: «Con esta, y la antecedente explicación creo serán pocas las cuestiones sobre los cuadrados, que no pueden resolverse, sobre la marcha, por medio de la tabla.»

Però encara, abans d'acabar, ens explica un altre procediment.

Comentaris sobre la tercera part

Aquí Subirà proposa un altre procediment per trobar N

Tenim R i D

$$\frac{N^2 - R}{D} = C$$

$$N^2 = R + CD$$

Es tracta de sumar a R tantes vegades D fins a un màxim de $D/4$ vegades (recordem que a partir del valors de $N > D/2$ es repeteixen).

Evidentment si alguna d'aquestes sumes és un quadrat perfecte l'arrel serà solució per a aquest divisor i residu.

Els càlculs que hi fa es poden entendre considerant les igualtats anteriors.

Finalment, ens parla d'un instrument que sembla que ha dibuixat en algun lloc i que anomena suma-resta: «Para facilitar la formación de las columnas, es muy adecuado un instrumento, que he ideado, y tiene la figura como en A visto de perfil...»

No sabem com era exactament aquest instrument. Però tota ajuda és bona per alleugerir els feixucs càlculs necessaris en la resolució d'aquest problema algebraic.

D'aquesta manera donem per acabada aquesta anàlisi de la «Memoria» de Subirà, si bé el lector atent segurament podrà trobar-hi més coses. No cal un gran nivell matemàtic, i sí una mica de paciència per poder seguir les seves disquisicions. En tot cas, cal reconèixer l'esforç que va esmerçar per trobar-hi relacions expressables amb llenguatge matemàtic.

Conclusions

Estem a punt de celebrar 1.000 anys del nomenament d'Oliba com a abat. Fa 300 anys del naixement d'Euler. I també la propera primavera la «Memoria sobre el problema algebraico» complirà 200 anys. La casualitat ens proporciona aquestes efemèrides amb números rodons. L'obra d'Oliba va contribuir al desenvolupament cultural (també matemàtic) europeu en uns temps de foscor. Molt més tard, un monjo il·lustrat de Ripoll que encara tenia al seu abast els antics manuscrits, va quedar enlluernat per unes matemàtiques belles, poderoses, que venien del nord. Que el van estimular a construir la «Memoria»que hem volgut explicar en aquestes línies. Donar-la a conèixer i contribuir al seu esclariment ha estat la nostra intenció.

Bibliografia

ANÒNIM [un amigo del autor]: Noticia del Viaje literario a las iglesias de España, emprendido de orden del Rey en el año 1802, escrita en el de 1814 (1820). Forma part del recull de Miguel Salvá i Pedro Sainz de Baranda: *Colección de documentos inéditos para la historia de España* (Madrid, 1852).

BARRAQUER, Cayetano (1915). *Los religiosos en Catalunya durante la primera mitad del siglo XIX*. Volum III.

BEER, Rudolf (1909). «Los manuscrits del monastir de Santa María de Ripoll», traducció de l'original alemany per Pere Barnils i Giol, *Boletín de la Real Academia de las Buenas Letras*. Barcelona.

DUNHAM, William (2000). *Euler. El maestro de todos los matemàticos*. Madrid: Editorial Nivola.

ELIAS DE MOLINS, Antonio (1889). *Diccionario biográfico y bibliográfico de escritores y artistas catalanes del siglo XIX*. Barcelona, Volum II.

EULER, Leonard (1774). *Éléments d'Algèbre*. Traducció de l'original alemany amb les addicions de Lagrange. Lió: Edit. Jean Marie Bruyset.

EULER, Leonard (1822). *Elements of Algebra*. Traducció anglesa del llibre anterior. 3a edició. Londres: Edit. Longman i altres.

LAGRANGE, Giuseppe L. (1867-1877). *Oeuvres de Lagrange* (7 toms). París: Gauthier-Villars.

LLAGOSTERA FERNÁNDEZ, Antoni (1997). «*Notes sobre els abaciologis del monestir de Santa Maria de Ripoll (Nou abaciologi)* », Annals 1995-1996. Ripoll: Centre d'Estudis Comarcals del Ripollès

PARDO REGO, Venancio (2003). *Lagrange. La elegancia matemática*. Madrid: Editorial Nivola.

PELLICER Y PAGÉS, José María (1888). *Santa Maria del Monasterio de Ripoll*. Mataró: Establecimiento Tipográfico de Feliciano Horta.

VERNET, Joan; PARÉS, Ramon (2004). *La Ciència en la Història dels Països Catalans*. Volum I Institut d'estudis catalans. València: Universitat de València.

VILLANUEVA, Jaime (1821). *Viaje literario a las iglesias de España*. Volum VIII.

Notes

1. J. M. Riera «Professions monàstiques emeses al monestir de Sant Pau del Camp (16721833)»,*Catalonia monastica*. Volum I (MCMXXVII [1927]).
2. Abat entre 1796 i el 6 de març de 1806, en què va morir a Ripoll, segons Pellicer. Vegeu «*Notes sobre els abaciologis del monestir de Santa Maria de Ripoll (Nou abaciologi)* », Annals 1995-1996. Ripoll: Centre d'Estudis Comarcals del Ripollès
3. Antonio Elias de Molins: *Diccionario biográfico y bibliográfico de escritores y artistas catalanes del siglo* xix. Barcelona, 1889-1895. Volum II. p. 646.
4. Arxiu del monestir de Montserrat.
5. Jaime Villanueva (1821). *Viaje literario a las iglesias de España*. Volum VIII, p. 36. En un altre punt del llibre diu també: «Dos veces he estado en este monasterio: una en Febrero de 1806, siendo abad D. Francisco Codol, y otra en Octubre de 1807, en los primeros días del suceso D. Andres de Casaus. En ambas he experimentado toda la franqueza que necesitaba en el examen de los tesoros literarios y diplomáticos de aquel antiguo monasterio: merced a la ilustración de sus monges, y a la protección que debí a su prior y vicario general D. Antonio Rocafiguera, que me hospedó en su casa» (Villanueva: *Viaje literario*. Volum VIII (1821). p. 2.). Jaume Villanueva va estar tres vegades al monestir de Ripoll, amb dues estades llargues, del 29 de gener al 21 de febrer de 1806 i del del 24 d'octubre al 5 de novembre de 1807, amb un dia de pas el 28 de febrer de 1806, tornant de Sant Joan de les Abadesses i marxant cap a la Cerdanya. Vegeu *Noticia del Viaje literario a las iglesias de España, emprendido de orden del Rey en el año 1802, escrita en el de 1814. La publica un amigo del autor (1820)*. p. 409-413, que forma part del recull de Miguel Salvá i Pedro Saínz de Baranda: *Colección de documentos inéditos para la historia de España* (Madrid, 1852).
6. Elias de Molins (1889-1895). *Diccionario biográfico y bibliográfico*. Volum II. p. 646.
7. Elias de Molins (1889-1895). *Diccionario biográfico y bibliográfico*. Volum II. p. 646.
8. Elias de Molins (1889-1895). *Diccionario biográfico y bibliográfico*. Volum II. p. 646. Elias de Molins indica que fou publicat a «Berga, en la imprenta de la Gaceta. En 4o., 54 páginas con 3 láminas».
9. Eren els horts situats, segons el plànol existent en el llibre de Barraquer, en el que avui forma part dels terrenys del casal parroquial i casa arxiprestal i una part de l'antiga farinera de la carretera de Sant Joan de les Abadesses, fins al riu Ter, a les ribes de qual passava el camí ral a Sant Joan de les Abadesses.
10. Es tracta segurament del molí d'En Tisto (antigament d'en Piella), que estava situat, segons indicacions extretes del llibre de Gonçal Cutrina sobre els molins fariners «llindant amb l'hort del monestir», «en el paratge anomenat de la Font-Viva» i «que termenejava a orient amb el riu Ter, mitjançant la sèquia del molí batan i el camí pel qual es va de Ripoll a Sant Joan». Vegeu Gonçal Cutrina (1993). *El Ripollès. Molins fariners*. Ripoll. p. 157.
11. Barraquer (1915). *Los religiosos en Catalunya durante la primera mitad del siglo* xix. Volum III. p. 201-202.
12. La sacristia major, antiga casa del monjo Rafael Subirá, fou cedida a l'Ajuntament de Ripoll el 1841, per servir com a hospital, però als pocs mesos es va declarar ruïnosa, amb necessitat de reparacions que ascendien a 1.600 rals. Abandonat l'edifici, aquest va retornar a l'Estat, ja que segons la legislació vigent, si als 6 mesos els edificis cedits no eren utilitzats per l'objecte per al qual havien estat sol·licitats, caducava la concessió. Amb tot, segons Eudald Raguer, feia pocs anys que l'Ajuntament encara havia utilitzat teules i fusta de la casa de la sagristia major, per posar una coberta a un afegit fet a la casa consistorial ripollesa.
13. Eudald Mirapeix i Illa. *Crónica de la villa y monasterio de Ripoll*. Manuscrit inèdit propietat de la família Mirapeix. 181 p.
14. José María Pellicer y Pagés (1888). *Santa Maria del Monasterio de Ripoll*. Mataró. p. 232.
15. José María Pellicer y Pagés (1888). *Santa Maria del Monasterio de Ripoll*. Mataró. p. 233,234.
16. Fou membre de la comissió.
17. Nosaltres hem fet servir també les *Obres completes* de Joseph Louis Lagrange citades en la bibliografia pel motiu que ara explicarem.
18. François Barrême (1638-1703) és segurament el matemàtic francès al qual es refereix, famós per les taules que va construir per facilitar el càlcul i que va donar origen a la paraula «barem».

D \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	2
3	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	3
4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
5	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0	5
6	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4	6
7	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	7
8	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4	8
9	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	9
10	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	10
11	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	0	1	4	9	5	3	3	11
12	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	12
13	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	13
14	1	4	9	2	11	8	7	8	11	2	9	4	1	0	1	4	9	2	11	8	7	8	11	2	9	4	1	0	1	4	9	2	11	8	7	8	11	2	9	4	1	0	1	4	9	2	11	8	7	8	14
15	1	4	9	1	10	6	4	4	6	10	1	9	4	1	0	1	4	9	1	10	6	4	4	6	10	1	9	4	1	0	1	4	9	1	10	6	4	4	6	10	1	9	4	1	0	1	4	9	1	10	15
16	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	16
17	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1	17
18	1	4	9	16	7	0	13	10	9	10	13	0	7	16	9	4	1	0	1	4	9	16	7	0	13	10	9	10	13	0	7	16	9	4	1	0	1	4	9	16	7	0	13	10	9	10	13	0	7	16	18
19	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	19
20	1	4	9	16	5	16	9	4	1	0	1	4	9	16	5	16	9	4	1	0	1	4	9	16	5	16	9	4	1	0	1	4	9	16	5	16	9	4	1	0	1	4	9	16	5	16	9	4	1	0	20
21	1	4	9	16	4	15	7	1	18	16	16	18	1	7	15	4	16	9	4	1	0	1	4	9	16	4	15	7	1	18	16	16	18	1	7	15	4	16	9	4	1	0	1	4	9	16	4	15	7	1	21
22	1	4	9	16	3	14	5	20	15	12	11	12	15	20	5	14	3	16	9	4	1	0	1	4	9	16	3	14	5	20	15	12	11	12	15	20	5	14	3	16	9	4	1	0	1	4	9	16	3	14	22
23	1	4	9	16	2	13	3	18	12	8	6	6	8	12	18	3	13	2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	2	13	3	18	12	8	6	6	8	12	18	3	13	2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	23
24	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1	0	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1	0	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1	0	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1	0	1	4	24
25	1	4	9	16	0	11	24	14	6	0	21	19	19	21	0	6	14	24	11	0	16	9	4	1	0	1	4	9	16	0	11	24	14	6	0	21	19	19	21	0	6	14	24	11	0	16	9	4	1	0	25
26	1	4	9	16	25	10	23	12	3	22	17	14	13	14	17	22	3	12	23	10	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	10	23	12	3	22	17	14	13	14	17	22	3	12	23	10	25	16	9	4	26
27	1	4	9	16	25	9	22	10	0	19	13	9	7	7	9	13	19	0	10	22	9	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	9	22	10	0	19	13	9	7	7	9	13	19	0	10	22	9	25	16	27
28	1	4	9	16	25	8	21	8	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	8	21	8	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	8	21	8	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	8	21	8	28
29	1	4	9	16	25	7	20	6	23	13	5	28	24	22	22	24	28	5	13	23	6	20	7	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	7	20	6	23	13	5	28	24	22	22	24	28	5	13	23	6	29
30	1	4	9	16	25	6	19	4	21	10	1	24	19	16	15	16	19	24	1	10	21	4	19	6	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	6	19	4	21	10	1	24	19	16	15	16	19	24	1	10	30
31	1	4	9	16	25	5	18	2	19	7	28	20	14	10	8	8	10	14	20	28	7	19	2	18	5	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	5	18	2	19	7	28	20	14	10	8	8	10	14	20	31
32	1	4	9	16	25	4	17	0	17	4	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	4	17	0	17	4	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	4	17	0	17	4	25	16	9	4	1	0	1	4	32
33	1	4	9	16	25	3	16	31	15	1	22	12	4	31	27	25	25	27	31	4	12	22	1	15	31	16	3	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	3	16	31	15	1	22	12	4	31	27	25	25	33
34	1	4	9	16	25	2	15	30	13	32	19	8	33	26	21	18	17	18	21	26	33	8	19	32	13	30	15	2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	2	15	30	13	32	19	8	33	26	21	18	34
35	1	4	9	16	25	1	14	29	11	30	16	4	29	21	15	11	9	9	11	15	21	29	4	16	30	11	29	14	1	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	1	14	29	11	30	16	4	29	21	15	35
36	1	4	9	16	25	0	13	28	9	28	13	0	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	0	13	28	9	28	13	0	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	0	13	28	9	28	13	0	25	16	36
37	1	4	9	16	25	36	12	27	7	26	10	33	21	11	3	34	30	28	28	30	34	3	11	21	33	10	26	7	27	12	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	12	27	7	26	10	33	21	37
38	1	4	9	16	25	36	11	26	5	24	7	30	17	6	35	28	23	20	19	20	23	28	35	6	17	30	7	24	5	26	11	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	11	26	5	24	7	30	38
39	1	4	9	16	25	36	10	25	3	22	4	27	13	1	30	22	16	12	10	10	12	16	22	30	1	13	27	4	22	3	25	10	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	10	25	3	22	4	39
40	1	4	9	16	25	36	9	24	1	20	1	24	9	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	9	24	1	20	1	24	9	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	9	24	1	20	40
41	1	4	9	16	25	36	8	23	40	18	39	21	5	32	20	10	2	37	33	31	31	33	37	2	10	20	32	5	21	39	18	40	23	8	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	8	23	40	41
42	1	4	9	16	25	36	7	22	39	16	37	18	1	28	15	4	37	30	25	22	21	22	25	30	37	4	15	28	1	18	37	16	39	22	7	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	7	22	42
43	1	4	9	16	25	36	6	21	38	14	35	15	40	24	10	41	31	23	17	13	11	11	13	17	23	31	41	10	24	40	15	35	14	38	21	6	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	6	43
44	1	4	9	16	25	36	5	20	37	12	33	12	37	20	5	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	5	20	37	12	33	12	37	20	5	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	44
45	1	4	9	16	25	36	4	19	36	10	31	9	34	16	0	31	19	9	1	40	36	34	34	36	40	1	9	19	31	0	16	34	9	31	10	36	19	4	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	45
46	1	4	9	16	25	36	3	18	35	8	29	6	31	12	41	26	13	2	39	32	27	24	23	24	27	32	39	2	13	26	41	12	31	6	29	8	35	18	3	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	46
47	1	4	9	16	25	36	2	17	34	6	27	3	28	8	37	21	7	42	32	24	18	14	12	12	14	18	24	32	42	7	21	37	8	28	3	27	6	34	17	2	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	47
48	1	4	9	16	25	36	1	16	33	4	25	0	25	4	33	16	1	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	1	16	33	4	25	0	25	4	33	16	1	36	25	16	9	4	1	0	1	4	48
49	1	4	9	16	25	36	0	15	32	2	23	46	22	0	29	11	44	30	18	8	0	43	39	37	37	39	43	0	8	18	30	44	11	29	0	22	46	23	2	32	15	0	36	25	16	9	4	1	0	1	49
50	1	4	9	16	25	36	49	14	31	0	21	44	19	46	25	6	39	24	11	0	41	34	29	26	25	26	29	34	41	0	11	24	39	6	25	46	19	44	21	0	31	14	49	36	25	16	9	4	1	0	50

Rafael de Subirà i de Còdol i la «Memoria sobre el problema algebraico» (1808)

Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona 1808

Criteris de transcripció

Estem davant un manuscrit científic, motiu pel qual no cal fer una transcripció paleogràfica o lingüística, sols fer-lo entenedor als lectors.

En aquest sentit, hem aplicat el següents criteris:

1. El text ha estat transcrit sense respectar l'alineament del manuscrit original.

2. Hem posat, però, entre claudàtors, la indicació de canvi de pàgina numerada de l'original, per facilitar-ne la consulta.

3. Hem actualitzat l'ortografia en el casos en què el text original manuscrit revelava el desconeixement de la versió correcta o, simplement, pel fet que hagin canviat les normes ortogràfiques. Així doncs, hem posat els accents i fet alguns canvis en la manera d'escriure. Per exemple, hem substituït «qual» per «cual», «qualquiera» per «cualquiera», «quando» per «cuando, «monge» per «monje», «qüestión/es» per «cuestión/es», «quatro/s» per «cuatro/s», «quadrado/s» per «cuadrado/s», etc.

4. Hem conservat dos arcaismes curiosos per recordar les característiques d'un escrit del començament del segle xix: «raíta/s» per «raya/s» i «coluna/s» per «columna/s».

5. Hem desenvolupat les abreviatures del text o les paraules enllaçades. Sols hem conservat les que s'usen com a fórmula: per exemple, Excmo. Sor. o V.E. (Vuestra Excelencia). Sols hem deixat les abreviatures «v.g.» que signifiquen en llatí *verbi gratia* 'per exemple'.

6. Hem respectat la puntuació de l'original.

7. En l'ús de majúscules i minúscules hem seguit els criteris actuals, que opten per un limitat ús de les majúscules. Sols hi ha l'excepció dels noms propis.

8. Hem mantingut els subratllats, sense transcriure'ls en cursiva.

[portada]

Nº 45 02

Memoria sobre el problema algebraico

Presentada en sesión de 21 de enero de 1808 con el memorial solicitando ser admitido académico D. Rafael Subirá y de Códol, monje benedictino en Ripoll, fue votada su admisión con destino a la Dirección de Álgebra y Geometría en 16 de Marzo de 1808.

[p. 1]

Excmo. S^or^.[1]

Esta disertación, o memoria que tengo el honor de presentar a la censura de V.E. sobre un problema algebraico hallé indicada en las adiciones de M. Lagrange a la análisis indeterminada de M. Euler. Dicho Autor no manifiesta allí cómo se encuentra, bien que dice, hizo investigaciones para facilitar su operación. El problema es indispensable para la resolución de algunas cuestiones las más difíciles, e intrincadas. Él por otra parte es de por sí una cuestión muy curiosa.

Problema

Este consiste en hallar un cuadrado, del que restado un número entero cualquiera, y dividido por otro entero cualquiera, dé el cociente en números enteros. Esto es; se pide el resultado de esta fórmula.

[p. 2]

$$\frac{N^2 - R}{D} = C$$

Para resolverlo discurrí que así como muchas otras tablas tienen cada una sus propiedades; y que siguiendo los cuadrados una ley constante, era muy posible, que las restas que provendrían de dividir los cuadrados por su orden, por un mismo número, seguirían tal vez una ley semejante. Con esto formé la inserta tabla para observar cuáles propiedades se seguirían de ella.

Para formar la tabla dividí los cuadrados gradatim por los números naturales hasta llegar a la raíz que era igual al divisor; esto es, si 8 era el divisor, tomaba los cuadrados de uno, dos, tres, cuatro &, hasta llegar a 8 que es igual al mismo divisor 8, y al mismo tenor con los demás. La tabla llega hasta el divisor 50. Examinela después con atención. Desde luego reparé que contiene un agrupado de números, que mirados de arriba abajo forman varias colunas, y observados de la izquierda a la derecha, unas líneas (a las que llamaré [p. 3] transversales).

La primera coluna D, son los números naturales, son los divisores del problema representados por D. Las otras colunas R son las restas representadas por esta letra que son los excesos, que provienen de dividir los cuadrados por el divisor correspondiente. La C de la fórmula, es el cociente, que resulta esta división. Se repara también que estas líneas transversales tienen ciertas propiedades; y que las colunas están divididas en varios agregados, con la propiedad de una ley determinada para cada coluna. Hay agregado de estos que tiene ya 2 por diferencia, ya el 3, ya el 4, &. Esta ley parece difícil a primera vista; pero mas abajo ya indicaré un modo claro para hallar cualquier término de estos agregados. Todo lo dicho hasta aquí se entenderá fácilmente al explicar la formación de la tabla y sus propiedades.

Vamos ahora a las líneas transversales, que son precisamente las que necesitamos. Ellas son también [p. 4] otros tantos agregados de restas, como tengo dicho, que en parte siguen, y se forman progresivamente con los números impares, imitando a los cuadrados en esta propiedad hermosa: Digo en parte, porque no son solos los impares los que sirven, también entran las restas antecedentes para su formación, y siempre con cierta dependencia del mismo divisor propio de la transversal. De todo esto se desprende, que en llegando a ciertas restas, se oculta la propiedad de los números impares, pero no se pierden; esto proviene de que los números impares, ya por sí, ya por la suma con las restas antecedentes, llegan entonces a ser mayores que el divisor respectivo; así es claro, que este debe restarse, y luego después vuelve a continuarse como antes. Todo saldrá expedito más abajo con los detalles que se darán. Tenemos, pues, con estas observaciones ciertas luces para hallar el método que se busca, con sus datos correspondientes.

Método

Desde luego se repara en cada línea transversal, [p. 5] que ella contiene por restas los cuadrados que no son divisibles por el divisor D, pero no importa, ellas nacen de los cuadrados de los números más inmediatos al dicho divisor, y es más acomodado para facilitar las transversales, e indispensable para poder señalar todas las restas posibles. Porque a fin de hallarlas todas para cada divisor basta hallar las que corresponden a la mitad del divisor; esto es a la D/2, y esto es así, como se puede ver por la tabla; por ejemplo 9 es el divisor, su mitad es 4, las restas que dan los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4, & divididos por nueve son 1, 4, 0, 7, los otros guarismos hasta 9 dan las mismas en orden inverso, y al pasar de 9 se repiten así como están en la tabla. Lo mismo sucede con todos los demás divisores.

Si quiere verificarse que, los divisores dan 1, 4, 9 &. por restas, tómese en orden inverso D-1, -2, -3, &. hasta D/2, cuádrense los resultados, divídanse, y saldrán las mismas transversales.

Para realizar la transversal se ha de atender mucho al primer, y último término; pues son los dos po-[p. 6]los, sobre que gira toda la operación, y el norte que dirija, y asegure en el rumbo que seguiremos. En efecto si empiezo la transversal por el número, ú resta 1, y opero bien llegaré a encontrar el último, si comienzo por el último toparé con el primero, si no sucede así, es señal infalible de que me he equivocado. Pongámoslo pues en práctica.

Se pide, v.g., un cuadrado, del que restado 8, y dividido por 34 dé el cociente en números enteros. Voy a sacar en primer lugar el término último de la transversal. Para esto se ha de advertir, que hay cuatro especies de números relativos a esta cuestión. Dos impares, y otros dos pares. Los impares tienen su expresión en las fórmulas del NII y los pares en las del III. Para sacar el último término, se han de dividir antes los divisores por 4, y se guardará el cociente, que se representa por la que dé las fórmulas dichas. Si la división da 1 u 3, de diferencia, entonces el divisor pertenece a los impares; si da 0, u 2 a los pares. Esto supuesto 34/4 da 8 por cociente, y 2 de diferencia; luego pertenece a la fórmula 4q+2. Esta fórmula dice: la mitad del divisor da el término último; tomo pues, la mitad de 34, es [p. 7] 17, como lo da la tabla. Vamos ahora al N.V, allí encuentro los números impares, (estos son fáciles de hallar, se empieza por 3, y se añade siempre 2 al término antecedente) son un índice, que me señala lo que debo hacer. Los escribo separados bastante, y debajo de ellos asiento 17 como allí, este es el último término de la transversal; debajo del 3, escribo 1, y la suma 4 la pongo debajo de 5; la suma de estos dos 9, la coloco debajo de 7, y así de los demás: Cuando la suma es mayor que el divisor, es bien claro, que éste se ha de restar de aquella; llego, por ejemplo al impar 11; 25 y 11 son 36, restados 34 quedan 2, los asiento debajo de 13; o bien de otro modo, quito 25 de 34, restan 9, los quito de 11 y me dan 2, es lo mismo como arriba.

Es 35 ahora el divisor, su fórmula está en el NII y es 4q+3. Digo 35/4 da 8 por cociente, la fórmula dicha, o la advertencia dice: El número (q + 1) hallado señala el término último de la transversal. Aquí es 9; coloco los impares como en el N.V, y un poquito más lejos el 9 debajo como allí. Voy sumando los impares y restas, y al llegar a una suma mayor que el divisor, resto este de aquella, prosigo y encuentro en fin el 9 señal cierta de que las restas [p. 8] van bien. Formada una idea bien clara de esto, de la tabla y de las fórmulas, no se puede caer en error, que no se conozca.

En todo cálculo se desea una senda que simplifique las operaciones. Aquí se repara en pasando del medio de la transversal, que los impares no son tan fáciles de manejar por más crecidos: Por este motivo voy a dar el siguiente método

Método abreviado

Vamos para eso al NVII, que será el último modelo a hallar las restas. Allí se repara: 1º que la mitad de 33 divisor es 16. 2º, que 4q+1 es la expresión, y que vale 8, restado del divisor da 25 para el término último. 3º que al llegar a la mitad de la transversal, esto es a la resta 31, los términos menguan, según el orden de los números naturales, quitando 1, 2, 3, & a 16, 3, 25, &, que por eso se ha escrito -q al principio de la transversal para memoria. Háganse las mismas aplicaciones al divisor 34 con la diferencia, que por ser los términos de la transversal, diez y siete, que es número impar, se toma la mitad de ella, y uno más, (para los divisores de esta fórmula en general) y los términos aquí crecen con añadir 2, 4, 6, 8, &ª. a 30, 15, 2, 25, &, la señal al principio es -+- 2n la n señala en toda transversal el número de los términos; si es por ejemplo [p. 9] el tercero el que se ha de formar en lugar n tomo 3, y sale 6, en efecto 2 es el 3º hacia la izquierda a quien se ha de añadir 6 y da 8. Se razonará lo mismo con todos los demás. Se advierte, que si la mitad del divisor es impar, se toma la mitad de la transversal, y uno más. Este uno, o el último después de la mitad de la transversal se deja intacto, como se ve en el N.VII en 31, 13, 11, 9; por eso será bueno poner un punto grande como allí. Se advierte más en el divisor 33, y semejantes en que se halla — n, para restar, que al llegar, por ejemplo al 4, no puedo restar 6, pues resto 4 de 6 da 2, este de 33 y da 31, y así de los demás. Quien quiera evitar esto puede sacar algunos términos últimos, hasta que haya de restar el divisor, como en este ejemplo, puede llegar hasta la resta 4. Los números 2, 4, 6, puestos al último encima de la transversal, indican la ley que siguen las restas, si se comienza la transversal por el último término.

Todo lo establecido hasta aquí, es general para todos los divisores; pues repasando bien la tabla, se hallará, que estos de cuatro en cuatro contienen estas propiedades en orden a este problema; para más claridad, se han puesto raítas al lado de los divisores. Lo mismo, sin duda sucederá en llegando el divisor a 100, y a 1000 y a lo más se encontrarán [p. 10] diferencias solamente muy leves.

Falta el ver si las transversales de 34 y 35 contienen la resta 8, y para el otro señalaremos 11, porque no estaba dada, después se buscará el cuadrado. Todo es fácil. Doy una ojeada a las transversales, y luego hallo la resta 8, y la otra 11 dos veces. Cuento el número de los términos desde 1, 4, & hacia la derecha hasta la resta 8, van 12; pues este 12 es el número que cuadrado satisface a los datos de la cuestión. En la otra transversal cuento los términos hasta la resta 11, van 9, paso adelante hasta la otra 11 van 16; este 9 y este 16, cuadrados satisfacen igualmente. Así si de ellos se resta 11, y se divide por 35, sale un cociente entero. A este tenor se procederá con los demás. Si la resta dada no se halla entre los términos de la transversal, es muy cierto que la cuestión es imposible y también imposibles las otras que necesitan de ella para su total resolución. Carácter muy apreciable. En el NV se repara a la derecha -33, -34, -35, lo hice por si se quiere empezar por estos números comenzando de la izquierda a la derecha como antes; el primero siempre una unidad menor que el divisor, los demás por su orden van siendo siempre menores, las restas se añaden a los excesos después de restados los pares o impares del di-[p. 11]visor. Estos van siempre menguando dos unidades. He dicho los números pares, pues lo son cuando el divisor es impar,(a) véase cómo se escriben y su resultado.

_ 10.	8.	6.	4.	2
11... 1.	4.	9.	5.	3.

No lo explico más, porque esto es más cansado, y menos expedito. Si se quiere hallar cuánto dista el divisor del cuadrado inmediato mayor, o bien cuántos divisores se encuentran entre el divisor dado, y el cuadrado dicho; v.g., entre 21, divisor dado, y 25, réstese el divisor del cuadrado, esto es, 21 de 25, y la resta 4 señala la diferencia. Aquí podría yo indicar un camino para formar los términos de las columnas de arriba abajo; pero no es de mucho tan expedito, y fácil, como el que insinúo en la segunda parte al explicar las columnas de la tabla, como se verá, y amas requiere sagacidad.

Si se desean encontrar los demás cuadrados, que divididos v.g., por 34, dan la resta 8, no hay más que valerse de la fórmula del N. IV ; n representa el número, o números si los hay, (como en 35 lo dicen las dos restas 11) menores que el divisor; D es el divisor multiplicado por un número entero cualquiera m, así multiplico D por 1, 2, &, y cada vez añado, o quito las n halladas, o hallado, y el resultado si se cuadra, tiene las mismas circunstancias.

[p. 12]

El método también resuelve este problema, y otros semejantes, Algo diferentes del propuesto: porque en lugar de restar un número cualquiera del cuadrado, al contrario, se añade al mismo. Declarémoslo con un ejemplo, pues esto basta. Se pide un cuadrado, que añadiéndole 5, y dividiéndolo todo por 23, dé el cociente en enteros. Formo antes las restas, después resto 5 del divisor 23, queda 18; miro en la transversal relativa al 23, si encuentro 18, hallo en efecto la dicha resta; sé que el cuadrado de 8 dividido por 23 da dos por cociente, después añado a este una unidad por la suma de 18 con 5, que es igual a 23, y por tanto este cabe en ella una vez, y sale el cociente 3. Hágase lo mismo con cualquier otro divisor, y otros casos diferentes.

Usos del método

Indicaré solo las cuestiones más difíciles, que necesitan de él para su cabal resolución.

1º.- para resolver estas dos ... ... $\dfrac{n^2 \pm R}{D} = C$

2º.- para resolver esta ... $cy^2\text{-}2nyz + Bz^2 = 1$

3º.- para poder cuadrar esta... $V(Ay^2+B)$

4º.- para conocer si puede convertirse en cuadrado esta at^2+bu^2 fórmula...

El que fije la atención en la resolución de estos problemas, verá cuán difíciles se hacen, si no hay algún recurso para abreviar, y asegurarse del problema de que se trata. De aquí se siguen estas [p. 13]

Ventajas

Sin este, ni otro socorro, son precisos muchos cuadrados, o sus tablas, y que sean fieles, hacer divisiones; si el divisor es grande se multiplican mucho las operaciones, sin guía que asegure de ellas. Si entre tantas se equivoca una, y está allí la resta, todas las tentativas son inútiles, y además el trabajo es muy prolijo. Con el método propuesto se evita la supuesta dificultad: dirige, asegura, es exacto, fácil y breve en cuanto lo permiten semejantes cuestiones.

De aquí viene a la mano la idea de cuán útil sería formar una tabla como la presente, en la que los divisores subieran hasta 1000. Hasta este divisor ya bastaría para los fines a que se destina.

El que quiera investigar sobre cuadrados, cubos, (pues no dudo que este método puede aplicarse a estos) y otras operaciones largas conviene muchísimo tenga tablas de ellos, si es posible, y también las tablas de cuentas hechas de Barremé en Francés, que son las más dilatadas; así se ahorra infinito trabajo, además contienen cosas curiosas.

Si este pequeño ensayo merece aprecio, tengo esperanzas muy fundadas de resolver la siguiente cuestión tan difícil... Hallar a priori todos los cuadrados que divididos por un cuadrado cualquiera den 1 de [p. 14] resta; con la elegante circunstancia de hallar también a priori, sin valerme de los cuadrados, todas las raíces, y todos los cocientes. Serviría para formar una tabla dificilísima, que se necesita, larga, y con mucha rapidez.

Con todo lo referido queda explicado el modo de formar las transversales, y resolver el problema; la explicación de las columnas, y demás circunstancias de la tabla, voy a exponerlo en esta

Parte segunda

Para acabar de formar una idea bien clara, y distinta de la tabla, voy a manifestar las propiedades de sus columnas de arriba abajo; las que son realmente muy curiosas. Con esto encontraremos, entre otras cosas, la circunstancia muy hermosa, y elegante, de poder señalar un cociente cualquiera, sin valerse de divisiones; más arriba ya se encontró la raíz y la resta.

Es preciso, pues, considerar, que todas las columnas tienen su origen en dos solos números; el primero está debajo de cero, que corresponde a la transversal de los números pares, y el otro también está en el término último de la transversal relativa al número par, o bien a 4q+2 que se halla en el medio justo de los divisores, que dan cero por término último, y nunca hay más de uno: es decir, que las columnas empiezan alternativamente por cero. Esto parece falso, pues parece que solo se señalan dos columnas, y por otra parte se separan infinitas, especialmente cuando los divisores son grandes. No obstante es cier-[p. 15]to lo que digo. Pongamos un ejemplo.

Empecemos por 25 término último de la transversal del divisor 33; se ve que la columna tiene los números 18, 11, 4, &, vamos a la inmediata hacia la derecha, es 17 el primero de la columna, y luego 9, 1, &, ahora hacia la izquierda hay muchas colunas; pero repárese, recorriéndolas de seguida, en donde empiezan, y se verá que todas tienen su origen en un lugar semejante; así la tercera inmediata a las dos que hemos hallado empieza por 15, y la cuarta por 22; a este tenor todas las demás, con la circunstancia que al paso que nos alejamos con las columnas de los divisores, aquellas son siempre más largas.

Las columnas al bajar, se ve que encierran varios agregados ya más cortos, ya más largos, y que todos cada uno de por sí siguen una ley determinada. A estos agregados de arriba abajo los llamaré, en su aplicación, siempre agregados, para no confundirlos con las transversales.

Ahora, pues, toca señalar esta ley, el primer término de este agregado, cuántos serán estos, y cómo se conocerá el cociente por medio de ellos, que resulta de dividir un cuadrado por un número cualquiera. Para proceder con claridad, voy a dar un modo fácil para encontrar los dos primeros términos sobre que se fundan todas las colunas. Es de reparar, que los términos últimos de todas las transversales, que están debajo [p. 16] de cero, y que corresponden a los impares, esto es, 4q + 1, van creciendo con el número 3 de diferencia. Los que pertenecen a los pares 4q + 2 tienen 2 por diferencia; y los que respectan a los impares 4q + 3 crecen según el orden natural de los números.

Nótese, que los números pares, e impares todos están colocados de un mismo modo de cero a cero; así sin peligro de error a la transversal o divisor, que se halla debajo de cero, la nombraré Q, a la otra debajo de esta R, a la otra S, y a la última V.

Esto supuesto, el que quiera formar una tabla, puede sacar desde luego una larga serie de términos últimos, asentándolos como aquí, y comenzando por el 4, que corresponde al divisor 5.

Divisores, y sus términos últimos

$$\left\{\begin{array}{llllllllllllll}
Q.. & 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22, & 25, & \& & .... & 3q & + & 1 \\
R.. & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & 17, & \& & ... & 2q & + & 1 \\
S.. & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9\,\& & .. & q & + & 1 \\
V.. & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \& & .. & .. & .. & .. & 0 & &
\end{array}\right.$$

Las fórmulas que se siguen a estos términos últimos sirven para hallar cualquiera de ellos, y las q son en todo semejantes a las q de las fórmulas de los divisores, menos en los divisores de S, que es q + 1, para encontrarse recíprocamente, y se escriben aquí, por si se quiere sacar algún término suelto, y el divisor correspondiente. Las q significan, qué lugar ocupan en la tabla los términos , y divisores; además la q de la fórmula 2q+2 (que siempre corresponde al divisor R, como dije, que está en medio de los que se encuentran entre cero y cero) manifiesta la diferencia del primer agregado, que corresponde a ese término. La [p. 17] otra columna, que está debajo de cero, tiene la misma diferencia si se toma la que está más abajo; al contrario, si se mira la de más arriba es una unidad menor, v.g., la coluna 9 tiene 4 por q este 4 es la diferencia; si se quiere la diferencia de la coluna siguiente, que tiene 16 por primer término, también es 4; pero si se quiere la de la coluna izquierda, que empieza por 13, es 3: lo mismo sucede con las demás colunas. La q de la fórmula manifiesta sobre todo el hallar sin división alguna precedente, el cociente, que proviene de dividir el cuadrado, v.g. de 9 por los divisores relativos a las diferencias de ese agregado. Aquí la q es 4, luego el cociente del cuadrado de 9 dividido por 18, 19, 20, siempre es 4. Hágase la prueba; con cualquiera coluna sucederá lo mismo, solo se mudará el valor de la q. Mas ese término indica qué coluna es la que le corresponde, y siempre es de la misma especie que él. Aquí este término es 2, luego por lo dicho es la columna nueve; 11 dará la coluna undécima. Así son todos los demás de esa especie, así luego se sabrá cuál es la octava, la décima &. El motivo por que esta diferencia señala el cociente, es porque dividir es lo mismo que restar cuanto se pueda un numero de otro; así si resto 18 lo posible de 81 cabe cuatro veces, si el 19 igual a 18 + 1 cabe también cuatro veces; ahora se ha de restar este 1 cuatro veces de la resta antecedente, luego [p. 18] señala el verdadero cociente.

Se puede saber el término último sin fórmula alguna. Una vez, que el que forma la tabla o la busca por curiosidad, sabe que entre cero, y cero hay en el medio un divisor R que es par, y que su mitad es el término último de la transversal, v.g., aquí es 18, cuya mitad es 9, si se toma la mitad de 9, y más 1, me da el segundo término 5 del agregado; si añado la mitad no más de 9 a este 9, me da 13, primer término del agregado antecedente; así por lo que he dicho antes, tengo las diferencias, y por consiguiente los cocientes. Esto es general.

Hasta ahora no hemos considerado sino los primeros agregados; falta, pues, hallar los restantes de cada coluna, la ley que siguen, y los cocientes respectivos. Los agregados de cada coluna son tantos, cuantas son las unidades de la diferencia del primer agregado respectivo, v.g. la diferencia del primer agregado de la coluna 9 es 4, pues tantos serán los agregados hasta encontrar el cuadrado constante, que es en donde ellos rematan con el número 1.

Hemos hallado ya el primer agregado de la coluna nueve. Después del guarismo 1 en ella, se sigue 18, primer término del segundo agregado, este acaba por cero, y la diferencia es 3. El tercero tiene 25 por primer término, y si se continúa terminará por 1 con 2 de diferencia. Después seguirá el último hasta el cuadrado constante, y la diferencia 1. Así se ve, que la dife-[p. 19]rencia de los agregados mengua siempre una unidad en cada uno de ellos.

El primer término de cada uno se encuentra fácilmente. Se observa cuál es la diferencia del agregado inmediato de encima, se resta el término último de éste, de su diferencia, el exceso, que resulta se resta del divisor, que corresponde al primer término del agregado ulterior, y el resultado es ese término; si es cero el término último del agregado de encima, se resta su diferencia del divisor correspondiente, el resultado será el término primero. He encontrado, v.g., el primer agregado de la columna 2, quiero hallar el segundo, que tiene por primer término 18, y este 21 por divisor; resto pues 1 de la diferencia 4, me da 3, este le resto de 21 me da 18. Tal lo da la tabla. Para formar los otros términos hacia abajo, tomo la diferencia 3, menos de una unidad que la de arriba. Como los cocientes siguen la misma ley, que la diferencia de los agregados, aquí serán 3, de modo que dividido el cuadrado de 9 por 21 me dará 3 por cociente, y la diferencia de la transversal, 18.

Vamos al término último de ese agregado segundo, es cero; la diferencia, por la que se forman sus términos, es 3; resto cero de 3, da 3, (es decir, que el cero no se resta) resto este 3 de 28, que es el divisor, que corresponde a 25, primer término del agregado tercero, me da el otro 25 como está en la tabla.

[p. 20]

Formo ahora este agregado hacia abajo, la diferencia será 2, por lo dicho arriba, y el cociente también 2. Eso es infalible. Con que todos los cocientes, que me darán los divisores 18, 19, 20, dividiendo el cuadrado de 9, tendrán el número 4; y los cocientes, que provendrán de dividir otro cuadrado por los divisores 21 hasta 27 inclusive tendrán el guarismo 3.

Todo esto en general, y cierto para todas las colunas, y sus agregados de la tabla, por dilatada que sea, con sola la circunstancia, que el primer agregado de cada columna relativa al divisor general R va creciendo en su diferencia de una unidad; pero la coluna inmediata a la derecha, no; sí que tiene la misma diferencia, v.g. la coluna nueve tiene 4 por diferencia, su inmediata goza de la misma, pero la coluna once tiene 5 por diferencia &.

Adviértase que las colunas de esta especie de divisor tienen una señal cierta para saber qué lugar ocupan en la tabla, y esta señal es el primer número de su cabeza, v.g. la coluna nueve tiene 9, la undécima tiene el 11 &, con esto se conocerá al instante el lugar de cualquier coluna: esto proviene de que este 9, este 11, con la mitad de los divisores 18, 22: el número de las restas se compone de esta mitad; luego señalan la coluna. Dése una ojeada a la coluna octava, 13ma. 14ma., y se verá como se verifica lo dicho hasta aquí.

Con esta, y la antecedente explicación creo serán pocas las [p. 21] cuestiones sobre los cuadrados, que no pueden resolverse, sobre la marcha, por medio de la tabla; y también tenemos dos métodos para formarla, los que parecen bastante sencillos, si se atiende, que aun cuando se extienda otra tabla hasta el divisor 1000, las restas más grandes no pasarán de tres guarismos; pues como el último divisor es 1000, y este número no consta sino de cuatro notas, las restas no pueden ser mayores, ni aun iguales a este número.

En los divisores que dan cero por término último, los cocientes siguen la misma ley, que los de los divisores R, puestos debajo de cero, v.g. el divisor 20 en su último término tiene 5 por cociente, como el divisor en su última resta 11.

Los divisores que son cuadrados como v.g. 25, luego después de cero, tienen una resta, que siempre es un número impar, que añadido a otro cuadrado, da el cuadrado siguiente, como dije arriba; con esto se ve luego cuánto dista el uno del otro. Así la tabla lo contiene todo: esto es, contiene los cuadrados, los impares con que se forman, las restas, los cocientes, y todas las otras propiedades indicadas, y otras que pueden seguramente encontrarse por hombres de talento perspicaz e inteligentes; y puede ver que de unas, y otras saquen consecuencias muy útiles, y provechosas.

También se puede encontrar el cociente solo con valerse [p. 22] de la línea transversal. En ella se repara, que las restas unas son mayores, y otras menores. Siempre pues que la izquierda a la derecha van de mayor a menor, cada vez que sucede, se añade una unidad al cociente, hasta acabar con la transversal. En la división 35, v.g. las restas de uno a 25 van de menor a mayor, no hay pues cociente alguno; de 25 a 1 va de mayor a menor, luego da una unidad por cociente; de 29 a 11, otra unidad, luego se añade a la otra, y será 2 el cociente; de 30 a 16, otra; de 16 a 4, otra; así con los demás divisores.

De aquí se sigue, que puede formarse una tabla, sin atender, que las restas vengan en colunas, se pueden escribir todas las restas que pertenecen a un mismo divisor en una misma llana, o llanas, según el número grande de los términos, señalan con números más pequeños, que los de las restas, colocados encima de ellas, los cocientes de 20 en 20, allí en donde pertenecen, y los cocientes intermedios con puntos. Mírase en la tabla el divisor 35; por ser pequeño he señalado los cocientes de tres en tres, los otros con puntos. El 1 encima de 16, significa tres cocientes, el $1^{2}5$ significa 6.

Concluido ya mi trabajo, me ocurrió la idea de si aún podría resolver la cuestión sin haber de hacer las restas antecedentes, para hallar la que se pide o se dada. Por fortuna he descubierto unas fórmulas, que con los términos [p. 23] generales de unas series algebraicas, cuyas diferencias segundas son constantes; todo lo que voy a manifestar con un modo seguro de operar en esta.

Tercera parte

Dado pues la división, y la resta, tómese el primero, divídase por 4; guárdese el cociente. Hecho esto súmese la resta, y el divisor; a esta suma añádese de seguida tantas veces el divisor, cuantas unidades hay en el cociente guardado; estas sumas, es más útil, hacerlas en colunas bien perpendiculares como en el NIV: (el divisor es 102, el término último 51, la resta es 70, se encuentra dos veces allí en donde hay puntitos en la coluna x). Mírese las sumas dichas arriba si son iguales a un cuadrado, si lo son es posible la cuestión, si no, no. Si las sumas son iguales a uno, dos, tres, cuadrados &x, tantas veces la resta se hallará, y correspondiente a su cuadrado.

Vamos a aclararlo con dos ejemplos. Por el primero, pido el divisor 30, y la resta 19. Divido 30 por 4, saco el cociente 7, lo guardo. Sumo ahora la resta 19 con 30 como en la coluna u; el cociente 7 tiene siete unidades, he de sumar pues, siete veces el 30, he hecho una, me faltan, pues 6, lo sumo de seguida seis veces. Miro en esta serie de sumas, si hay alguna que sea igual a algún cuadrado, encuentro dos, que son 49, y 169, cuyas raíces son 7, y 13,

$$\left.\begin{array}{l} 49\_ \\ 79. \\ 109. \\ 139. \\ 169\_ \\ 199 \\ 229 \end{array}\right\} u$$

[p. 24] luego la resta 19 se ha hallado dos veces, mírese la tabla que allí se encontrarán. Vaya el segundo ejemplo. El divisor es 35, y la resta 11. Divido 35 por 4, saco el cociente 8, lo guardo. Sumo ahora 11 con 35, pongo la suma como en la coluna u y luego de seguida sumo 35 siete veces, y así le habré sumado 8 veces, pues tantas unidades hay en el cociente 8. Miro en esta serie de sumas cuántas hay iguales a un cuadrado, hallo dos, que son 81, y 256, cuyas raíces son 9, y 6, luego la resta 11 se halla dos veces, mírese la tabla. Al paso que se hallan los cuadrados, nótense con una raita para memoria. Nótense también las sumas, cuyo último guarismo o cifra fuese 1, 4, 5, 6, 9, con puntitos, para no buscar más que estas, pues los cuadrados no tienen por cifra última más números que estos. Esto se hará para abreviar, y dejar las superfluas. Adviértese que es indispensable tener una tabla de cuadrados, con sus raíces para comparar las sumas halladas con todos cuadrados. La razón es, porque hasta ahora es cuadrado, o no.

u
46
81_
116
151
186
221
256-
291

Vamos a dar razón de este método. El por qué divido primero el divisor por 4, y después hago tantas sumas, como unidades hay en el cociente, es por tener la propiedad hermosa este cociente, que todas sus unidades representan tantos cocientes, cuantos se encuentran en la transversal del divisor, y es igual a la diferencia que hay entre el último [p. 25] término, y el que se sigue debajo; (menos el cociente de los divisores, que pertenecen a la fórmula 4n + 1, que tiene una unidad menos) así es superfluo buscar más sumas.

La razón por que se hacen tantas sumas es porque como los divisores caben alguna, o algunas veces en los cuadrados, hemos también de tomarlos alguna o algunas veces para hallar los cuadrados, y como se halla también la resta a veces repetido, hemos de continuar las sumas hasta acabar los cocientes, para asegurarnos de hallarlas todas las que sean repetidas.

Las ventajas de esta operación son, que como el divisor que se suma es mucho más grande, que los impares, que se añaden a las restas para formar las transversales, valía por encima de muchas restas, y así se acaba más pronto, y se dejan las restas que entonces no sirven. Este método se puede aún abreviar por mitad.

Para esto divido el divisor como antes, guardo el cociente, guardo este cuadrado, sumo como antes la resta con el divisor y luego sumo tantas veces el divisor, cuantas veces sean menester para exceder, o traspasar el cuadrado guardado; en excediéndolo, ceso de hacer más sumas. Tomo después la primera suma, resto de ella el término úl-[p. 26]timo, sumo con el resultado el divisor tantas veces, cuantas conviene para igualarse la última suma con el cuadrado guardado; en rigor no es necesario, que se le iguale, basta que sólo falte un cantidad menor que el divisor, se hará lo que se quiera, pues también puede excederle, como diré; y esto de exceder, o faltar sucederá, siempre que la resta no se halle en el cuadrado guardado. Hecho esto, miro las sumas, y las comparo cada una con el cuadrado mayor más inmediato, añado la raíz de este cuadrado a la suma, y si esta suma es igual al cuadrado dicho, allí está la resta; hago lo mismo con las demás sumas, que he hallado ahora, y queda concluida la operación. Antes de hacer las sumas, se ha de restar el término último de la resta dada, se compara, como antes, lo que queda con el cuadrado inmediato mayor, añado su raíz, si esta suma es igual al cuadrado, allí está también la raíz. Acabadas de comparar las sumas, si la raíz con la suma es igual a un cuadrado, resto esta raíz de la mitad del divisor, la diferencia más uno es la raíz, cuyo cuadrado dividido por el divisor relativo, satisfará a la cuestión. Con un ejemplo se hará claro.

Tomo el divisor 35, y la resta 11 como antes. Divido 35 por 4, guardo el cociente 8, guardo su cuadrado 64 para [p. 27] saber hasta dónde he de proseguir las sumas. Sumo pues 35, saco 46 como en u; sumo otra vez 35, pero con 46, saco 81, aquí paro, porque ya excede al cuadrado 64, que he guardado. Paso ahora a la segunda operación.

Puesto el término último 9 de 11, que es la resta, queda 2, este dos lo comparo con 4, cuadrado inmediato mayor, añado su raíz 2 al 2, este es igual al cuadrado 4, luego aquí está ya la resta una vez. Paso adelante, resto el término 9 hallado arriba, saco 37, lo sumo con el divisor 35, saco 72; aquí paro, porque ya es mayor que 64, que guardaba, así he formado la columna x. Las sumas se han de escribir como sigue..........

u	x
46	2
81	37
	72

Miro ahora las sumas de la coluna u si son cuadrados, lo es sólo 81; este, pues, satisface a la cuestión; para saber el cociente, basta contar las sumas, aquí hay dos de ellas, así es 2 el cociente. La razón es, porque he sumado dos veces el divisor. Voy ahora a la coluna x; comparo 37 con 49, cuadrado inmediato mayor, añado 7, raíz de este, a 37, no es igual a 49, luego no sirve. Si comparo 72 con 81, y añado, como antes, la raíz 9 de este, vale 81, luego este sirve, sale el mismo, que el de la coluna u; así no te-[p. 28]nemos la resta 11 más que dos veces; pero esto será prueba para ver si equivocamos la segunda coluna x. Este modo de formar la coluna x, solo sirve para los divisores, que divididos por 4, dan 1, ú 3 de resta: para los divisores que dan 2 de resta, se forma la coluna x, restando de la primera suma de la coluna u el último término, luego sumar con lo que queda el divisor, hasta encontrar más o menos el cuadrado guardado, mirar si las sumas son cuadrado, las que lo sean, estas satisfacen a la cuestión. También antes se ha de restar el término último de la resta dada; si hecho esto queda un cuadrado, es señal, que allí está la resta. Las raíces de los cuadrado hallados se restan de la mitad del divisor, lo que queda es la raíz, que cuadrada responde a lo que pide. Con un ejemplo me explicaré mejor.

Tomo el divisor 30, y la resta 19. Divido 30 por 4, guardo el cociente 7, guardo el cuadrado 49, formo la coluna u no da más de una suma: formo, pues, la coluna x, resto 15 de 19 da 4; resto el mismo 15 de 49, suma primera, saco 34; con este 34 sumo 30, da 64, aquí paro, pues excede a 49.

u	x
49	4
6	4

Veo ahora, que 49 es un cuadrado; luego está ahí la resta. Paso a la coluna x; veo que 4, y la suma 64 son cuadrados, luego también está allí la resta; resto las raíces 2, y 8 de la mitad del divisor 30, me dan 13, y 7 por raíces, cuyos cuadrados satis-[p. 29]facen a la cuestión. Si los divisores divididos por 4, dan cero por resta, esto es, no dan ninguna, solo sirve la coluna primera u de las sumas; pues las restas en pasando de la mitad de la transversal, (que es igual al cociente del divisor dividido por 4) aquí siempre son las mismas. Dese una ojeada a los divisores de la tabla, que tienen por término último el cero.

Vamos a dar la razón de la segunda coluna x. Para formar las dos colunas, sirven estas fórmulas muy simples

La primera, y la de arriba son para los divisores, que dan uno, ú 3 de resta; y la primera misma, y la de abajo para los divisores, que dan 2 de resta, se entiende, que estas restas provienen de dividir los divisores por 4. Las letras de las fórmulas significan: D el divisor, y las veces que el divisor se suma, R es la resta; n representa la raíz, t el término último. Dy + R es general, como se ve, para la coluna u de todos los divisores. Obsérvese, que esta fórmula es el término general de una serie de primera orden, cuya diferencia constante es D.

$$Dy + R\begin{cases} n^2 - n + t \\ n^2 + t \end{cases}$$

Para las otras dos fórmulas se ha de prevenir, que las restas de la tabla miradas de la derecha a la izquierda, algunas de ellas forman una serie de segunda orden, las primeras que se encuentran; si se continúan los térmi-[p. 30]nos de la serie, se encontrarán, que siendo mayores que el divisor, con la excelente cualidad, que si se resta este de aquellos, quedan solo las restas de la transversal, por consiguiente estas son parte de aquellos: Por tanto cuando formamos la segunda coluna x, y con ella buscamos los cuadrados, no hacemos otra cosa, que reproducir el cuadrado del término general respectivo al divisor; porque las dos fórmulas, que pertenecen a la coluna x de las sumas, son los términos generales de estas series de segunda orden.

Para facilitar la formación de las colunas, es muy adecuado un instrumento, que he ideado, y tiene la figura como en A visto de perfil, tiene un dedo de ancho o lo que se quiera, y unos cuatro o cinco de largo, es de metal para que sea pesado, es algo más grueso que una peseta. Se envuelve en su medio un papel, se agarran los lados de este con oblea uno sobre otro como una carta, se escribe encima el divisor, después el instrumento se coloca con cuidado encima de las sumas, con lo que se suma muy cómodamente el divisor. Si se hace dar vueltas al papel, puede servir muchas veces. La práctica lo enseñará todo mejor que la explicación. Al instrumento le llamo suma-resta.

Para la segunda coluna x perteneciente a los divisores, que divididos por 4, dan 1, 3 por diferencia, se puede [p. 31] abreviar mucho la comparación de las sumas con los cuadrados, comparando solas las sumas, cuyo último guarismo es cero, 2, 6; pues todas viven, las otras son inútiles. Esto se verá, si se resta el último término de los otros términos de la serie. También se sacaría esta regla de la fórmula siguiente ... $n^2 + n + t$, que es la suma de lo que se añade a cada término de la serie, cuyo término general es 2n, n es el número de los términos; 2n es lo que se añade a cada término de la serie para sacar el inmediato. La suma general sirve para sacar cualquier término de la serie sin dependencia de los demás términos.

Nota

Para hallar el último término de las series de la derecha a la izquierda, que es el que se acerca más al divisor correspondiente, tómese siempre el cuadrado menor que él, del que restada la raíz de otro cuadrado, (el exceso no es mayor al que hay del último término al divisor) después fórmese el término según la fórmula del término general, a quien pertenece; v.g. en el divisor 35, es 29 el término mayor de la serie, tomo 25 cuadrado menor que 35, opero según la fórmula, y sale 29, este será [p. 32] el mayor, y de quien aún no puede restarse 35. Su raíz –1 restada del mayor cociente, que se halla en el término último de la transversal, da su propio cociente; lo mismo sucederá con las restas, que están a la derecha antes de él; si dicho término pertenece a los divisores, que divididos por 4 dan 2 de resta, a su raíz nada se quita.

Concluí por fin la exposición del problema, y de las maravillosas propiedades de su tabla, que son tales que puedo a la verdad recelar, que no se encontrará otra cualquiera tabla, sea la que fuere, que tenga tantas, y tan preciosas; y siguiendo a estas los pasos, hemos encontrado tres modos, el uno más breve que el otro para resolverlo, y que abrevian la operación a lo menos seis veces más.

Este es Excmo S^{or}. el pequeño ensayo, que presento a V.E., y aunque no tiene tal vez el mérito, que exige tan distinguido cuerpo; espero, que en uso del celo que le caracteriza en el adelantamiento de las ciencias naturales, y artes, se dignará disimular su pequeñez y faltas; y con tal indulgencia animar a dedicarse a ellas al abajo firmado; de cuya gracia le quedará [p. 33] en el mayor grado de agradecimiento.

B. L. de V. E.
su más atento servidor
F Rafael de Subirá y de
Codol, Monge de la Congre^{n}.
Benedic^{na}. Clus^{l}. tarrac^{se}.